III етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з астрономії 2016/2017 навч. року.

Харківська область. 11 клас. 08.02.2017р.

Задача 1 Сонце та Проксіма. (5 балів) На якій відстані від Проксіми Центавра, її видима зоряна величина та видима зоряна величина Сонця зрівняються? Чому вони дорівнюватимуть? Абсолютні зоряні величини: M_{ProxCen}=15.6, M_{Sun}=4.83. Відстань між зорями 1.3 пк.

Розв'язок:

Запишемо рівняння, що пов'язує абсолютну зоряну величину M, видиму зоряну величину V та відстань від зорі до спостерігача r.

$$M = V + 5 - 5\log(r) \qquad \text{(1 бали)}$$

Позначимо через M_1, V_1 абсолютну та видиму зоряну величину відповідно Сонця, а через M_2, V_2 – Проксіми Центавра. r_1 та r_2 – відстань від Сонця та Проксіми відповідно до спостерігача, який бачить ці зорі як зорі однакової зоряної величини.

Запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} M_1 - 5 + 5\log(r_1) = M_2 - 5 + 5\log(r_2) \\ r_1 + r_2 = 1.3 \end{cases} \qquad \text{(1 бали)}$$

і розв'яжемо її:

$$\log(r_1) - \log(r_2) = \frac{(M_2 - M_1)}{5}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = 10^{\frac{(M_2 - M_1)}{5}} = 142.5 \qquad \text{(1 бали)}$$

$$r_1 = 142.5 r_2\,,\ r_2 + 142.5 r_2 = 1.3\text{ïê}$$

$$r_2 = \frac{1.3}{143.5} = 0.009\text{ïê} = 0.029\text{ñâ.ðîêè} \qquad \text{(1 бали)}$$

Знайдемо значення видимої зоряної величини, яка буде для Проксіми Центавра і для Сонця однаковою

$$V_1 = V_2 = 15.6 - 5 + 5\log(0.009) = 0.37 \qquad \text{(1 бали)}$$

Відповідь: на відстані 0.009 пк від Проксіми Центавра її видима зоряна величина та Сонця зрівняється і складатиме $V=0^m.37$.

Задача 2. Період та піввісь. (10 балів) В деякого астероїда синодичний період (в роках) дорівнює великій півосі (в а.о.), а його ексцентриситет дорівнює найменшій можливій відстані до Землі (в а.о.). Вважаючи що орбіта Землі є коловою, а астероїд рухається в площині екліптики, розрахувати велику піввісь, ексцентриситет та сидеричний період.

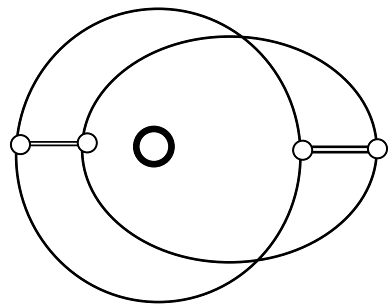
Розв'язок. Згідно з третім законом Кеплера позначимо велику піввісь (в а.о.) $a = x^2$, сидеричний період (в роках) $T = x^3$. Синодичний період S визначається з рівняння $\frac{1}{S} = \left|1 - \frac{1}{T}\right|$. В залежності від того, більше T одиниці чи менше, це рівняння отримує вигляд: $\left\{\begin{matrix} x^3 = 1 - x, & x < 1 \\ x^3 = 1 + x, & x > 1 \end{matrix}\right\}$. (При цьому ми вже підставили S=a=x^2, T=x^3, та виконали елементарні спрощення). (3 бали)

Це рівняння третього ступеню, але, дивлячись на його гранично простоту, рішення неважко знайти підбором: $x_1 = 0.683$, $x_2 = 1.325$. (приймалися всі рішення в інтервалах 0.666 – 0.7 та 1.3 – 1.333). (3 бали)

Відповідні великі півосі – a_1=$x^2{}_1$=0.466, T_1=$x^3{}_1$, a^2=$x^2{}_2$=1.756, T^2=x$^3{}_2$=2.326. (2 бали)

Найменшу відстань до Землі в першому випадку астероїд досягає в афелії: $1 - a(1+e) = e$, а в другому – в перігелії $a(1-e) - 1 = e$, що приводить до рівнянь для визначення ексцентриситету: $e_1 = \frac{1-a_1}{1+a_1} = .362$ та $e_2 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = .274$. (2 бали)

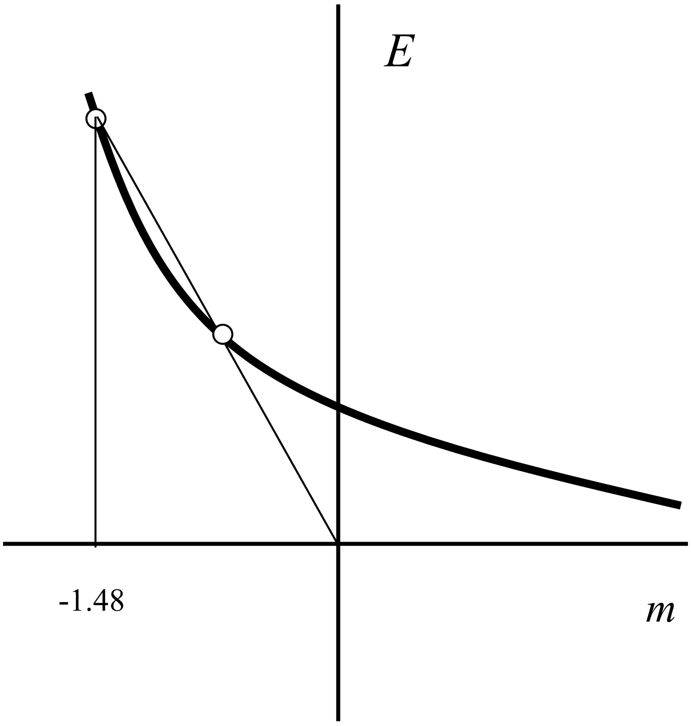
Додаток: Один з учасників переплутав синодичний та сидеричний періоди та став вирішувати задачу з умовою не a=S, а a=T. Він отримав рішення, яке не передбачалось автором, але має право на існування: a=T=1, e=0.5. В цьому випадку рівняння $\frac{1}{S} = \left|1 - \frac{1}{T}\right|$ формально дає $S \to \infty$, але треба використовувати не його а визначення синодичного періоду: «проміжок часу між двома послідовними однойменними конфігураціями планети». Якщо орбіти Землі та планети розташовані як на малюнку, між послідовними протистояннями або сполученнями астероїду буде дійсно проходити 1 рік, а мінімальна відстань в а.о. буде дорівнювати ексцентриситету:



Задача 3. Пропорційні зорі. (10 балів) Вважати, що освітленість E, яку зоря створює на Землі, пропорційна до її видимої зоряної величини m, є грубою помилкою. Однак, коли школяр все ж розрахував освітленість від деякої зорі по пропорції, порівнюючи цю зорю з Сиріусом (αCMa, m=-1.48^m), він отримав результат, дуже близький до правильного. Яка це була зоря, та яку видиму зоряну величину вона має?

Розв'язок.

Освітленість E від зорі залежить від її видимої зоряної величини m як $10^{-0.4m}$ (див. рисунок). (2 бали)



Ця функція спадає зі зростанням зоряної величини. Тому пропорційність між зоряними величинами та освітленістю від двох зір може здійснюватись лише якщо обидві мають від'ємні видимі величини. Сиріус відповідає цій вимозі. (1 бал)

Запишемо умову задачі в формі рівняння:

$$\frac{E_{\alpha CMa}}{E} = \frac{10^{-0.4m_{\alpha CMa}}}{10^{-0.4m}} = \frac{m_{\alpha CMa}}{m} = \frac{-1.48}{m} = \frac{1.48}{-m}$$

(1 бал)

Логарифмуючи, отримуємо:

$$0.4(1.48+m) = \lg 1.48 - \lg(-m)\text{, або}$$

$$1.48 + m = 2.5\lg 1.48 - 2.5\lg(-m),$$

$$m + 2.5\lg(-m) = -1.05\,.$$ (2 бали)

Це рівняння не має простого аналітичного рішення, але графік підказує приблизну відповідь m≈-1.48/2 = -0.74. (2 бали)

Перевіряємо: -0.74+2.5lg(0.74)=-1.07.Точніше й не треба, бо в умовах задачі сказано, що отримано не точний, а лише «близький до вірного» результат. (1 бал)

(При оцінюванні приймалися як правильні всі відповіді в діапазоні від -0.6 до -0.8)

Зоря з m=-0.74 дійсно є на небі, це – Канопус (αCar), друга за яскравістю зоря на небі, на жаль невидима з території України. (1 бал)

Задача 4. Комета Галлея. (10 балів) Комета Галлея пройшла свій перигелій у 1986 році на відстані 0.587 а.о. від Сонця (велика піввісь її орбіти а=17.834 а.о.). Обчислити ексцентриситет орбіти та період обертання комети (у роках). Яку швидкість комета мала під час проходження перигелію?

Розв'язок.

Запишемо зв'язок між перегелійною відстанню та великою піввіссю $p = a(1-e)$;

де e – ексцентриситет орбіти. Знайдемо значення ексцентриситету

$$e = \frac{a-p}{a} = 0.967 \qquad \text{(2 бали)}$$

Згідно з ІІІ законом Кеплера (порівнюючи з Землею):

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{1}{1}\left[\frac{a.o.^3}{pi\hat{e}^2}\right] \to T = a^{\frac{3}{2}} = a\sqrt{a} = 75.314 \qquad \text{(2 бали)}$$

Згідно з другим законом Кеплера, радіус-вектор, який сполучує Сонце та комету, за одиницю часу описує площу, яку можна знайти поділивши площу всієї орбіти на період обертання комети:

$$w = \frac{S}{T} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{\pi\, a^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a^3}} = \mathrm{const} \qquad \text{(1 бал)}$$

З іншого боку, в афелії та перигелії, коли вектор швидкості перпендикулярний до радіус-вектору $w = \frac{rV}{2}$. Тоді швидкість у перигелії можна записати: $V = 2\frac{w}{r} = \frac{2\pi\, a^2\sqrt{1-e^2}}{r\sqrt{a^3}}$

$$V = \frac{2\cdot 3.14\cdot 17.834^2\cdot\sqrt{1-0.9671^2}}{0.587\sqrt{17.834^3}} = 11.5\left[\frac{a.o}{pi\hat{e}}\right] \qquad \text{(3 бали)}$$

Переведемо у км/сек:

$$\frac{1.5\cdot 10^8}{31.56\cdot 10^6} = 4.76\ \left[\frac{\hat{e}\grave{i}\ *pi\hat{e}}{ce\hat{e}*a.e}\right],\ V = 11.5\cdot 4.76 = 54.74\left[\hat{e}\grave{i}\ /ce\hat{e}\right]$$

Відповідь: e=0.967, T=75.314 років, V=54.74 км/сек. (2 бали)

Задача 5. Найшвидший пульсар. (10 балів) Пульсар PSR J1748-2446 має найкоротший період обертання із усіх відомих: він робить 716.38 обертів за секунду. Його маса дорівнює $4{\cdot}10^{30}$ кг а радіус – 16 км. Порівняйте лінійну швидкість на його екваторі зі швидкістю світла, та оцініть густину, яку повинна мати речовина пульсара, щоб його не розірвали відцентрові сили. Порівняйте її із густиною ядра свинцю (радіус ядра $6.9{\cdot}10^{-13}$см, атомна маса 207 а.о.м.).

Розвязок.

Період обертання $T=1/n=0.0013959$ с. Лінійна швидкість на екваторі

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\cdot 3.14\cdot 1.6\cdot 10^4}{1.39\cdot 10^{-3}} = 7.2\cdot 10^7 \text{ м/с.} \qquad \text{(1 бал)}$$

Тобто, вона складає ($V/c=0.24$) 24% від швидкості світла.

Тіло із таким швидким обертанням має буди надзвичайно щільним, бо саме його існування є можливим лише коли відцентрові сили, пов'язані із швидким обертанням, менше за сили тяжіння. Тобто, відцентрові сили не можуть розірвати тіло, якщо відцентрове прискорення на екваторі $\Omega^2 R$ менше за прискорення сили тяжіння GMR^{-2}:

$$\Omega^2 R < \frac{GM}{R^2}$$

$$\frac{M}{R^3} > \frac{\Omega^2}{G}$$

$$\frac{M}{R^3} = \frac{4}{3}\pi\rho \qquad \text{(7 балів)}$$

$$\rho > \frac{3}{4\pi}\frac{\Omega^2}{G}$$

$\rho>0.7{\cdot}10^{14}$ г/см^3,

де $\Omega=2\pi\nu$ – колова частота, R - радіус нейтронної зорі, ρ – її густина, M – її маса, G – гравітаційна стала.

Знаходячи густину ядра свинцю, вважаючи його однорідною сферою із зазначеними параметрами, отримаємо $2.5{\cdot}10^{14}$ г/см^3, тобто густина цього пульсара у 3.5 рази менше за ядерну. (2 бали)

Задача 6. Гарячий юпітер. (15 балів) Планета WASP-33b обертається навколо своєї зорі на відстані 0.02 а.о. Зоря має ефективну температуру 7400° К, її радіус 10^6 км. Знайдіть температуру планети, виходячи з того, що вона знаходиться у тепловій рівновазі, тобто енергія, що поглинається планетою, вся випромінюється планетою в інфрачервоному діапазоні. Порівняйте теплову швидкість руху атомів водню в атмосфері планети із другою космічною. Як можна інтерпретувати цей результат. Маса планети $3.8\cdot10^{27}$ кг, радіус $1.1\cdot10^5$ км, планета відбиває 34% випромінювання, що на неї падає.

Розвязок. Кожна планета отримує за одиницю часу енергію (*E*), що дорівнює добутку потоку світності зорі (*L*), діленої на $4\pi a^2$ (де *a* – відстань планети від зорі) на площу поперечного перерізу планети (*S*), перпендикулярного променям зорі. Ця площа, як відомо, дорівнює добутку числа π на квадрат радіуса *R* планети:

$$E = \frac{L}{4\pi a^2}\cdot \pi R_{PL}^2$$ (1 бал)

Світність зорі легко отримати із закону Стефана-Больцмана:

$$L = \sigma T^4 \cdot \pi R^2$$ (1 бал)

Якщо відбивна здатність планети (альбедо) *A*, то планета поглинає лише частину (*1-A*)падаючого випромінювання, і отримувана планетою енергія складає:

$$E = \left(1 - A\right)\cdot \frac{\sigma T^4 \cdot \pi R^2}{4\pi a^2}\cdot \pi R_{PL}^2$$ (2 бал)

Планета, як сказано у умові, знаходиться у рівновазі і випромінює всю енергію, яка була нею поглинута. Отже, власне планета, нагріта поглинутим випромінюванням до температури *T* буде за законом Стефана-Больцмана випромінювати енергію:

$$E_{PL} = \sigma T_{PL}^4 \cdot 4\pi R_{PL}^2$$ (1 бал)

Прирівнюючи вирази (4) і (3) отримаємо:

$$\sigma T_{PL}^4 \cdot 4\pi R_{PL}^2 = \left(1 - A\right)\cdot E_{\otimes} \cdot \pi R_{PL}^2$$ (3 бал)

$$E_{\otimes} = \frac{\sigma T^4 \cdot \pi R^2}{4\pi a^2}$$ (1 бал)

- величина, що вказує енергію, яка приходить на верхню межу атмосфери планети від зорі на одиницю площі ($4.2\cdot10^6$ Вт/м^2).

З формули (5) виражаємо температуру планети:

$$T_{PL} = \sqrt[4]{\frac{\left(1 - A\right)\cdot E_{\otimes}}{4\sigma}}$$ (2 бал)

Підставивши числові значення отримаємо T_{PL}=1870K.

Друга космічна швидкість для планети:

$$V_{II} = \sqrt{\frac{2GM_{PL}}{R_{PL}}}$$ (1 бал)

Підставивши числові значення отримаємо V_{II}=67.5 км/с.

Найімовірніша швидкість атомів водню при температурі планети:

$$V_H = \sqrt{\frac{2kT_{PL}}{m}}$$ (1 бал)

Підставивши числові значення отримаємо V_H=10.9 км/с. Оскільки атоми водню мають швидкості, що розподілені за законом Максвела, то завжди у частини атомів швидкість буде перевищувати другу космічну даної планети, тому вони у верхніх шарах атмосфери, де зіткнення між атомами малоймовірні, зможуть полишити планету. А оскільки друга космічна та середня теплова швидкості відрізняються не дуже сильно, то частина таких атомів буде досить значна і за космогонічні проміжки часу планета може втратити значну частину водню. (2 бали)