

Задача 1 **Годинник на Церері.** (5 балів) Наскільки змінить свій хід маятниковий годинник, якщо його перенести із Землі на карликову планету Церера? Відомо, що період обертання штучного супутника Церери по низькій коловій орбіті складає 145 хвилин. Радіус Церери 480 км.

Розв'язок.

$$\text{Період математичного маятника на поверхні Землі } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_0}}, \quad (1 \text{ бал})$$

де, L – довжина маятника, g_0 – прискорення вільного падіння на Землі. Оскільки Церера, значно менша за Землю, то і прискорення вільного падіння менше, отже період зросте і годинник сповільнить свій хід.

Під словами "на низькій коловій орбіті" слід розуміти те, що супутник рухається по орбіті, радіус якої можна прийняти рівним радіусу планети, із першою космічною швидкістю. Знаючи період (145 хвилин) та радіус (480 км) отримаємо швидкість.

$$v = 2\pi R/T = 0.347 \text{ км/с} \quad (1 \text{ бал})$$

Тепер прискорення вільного падіння на Церері знайдемо із формули для першої космічної швидкості:

$$g = v^2/R = 0.25 \text{ м/с}^2 \quad (1 \text{ бал})$$

Відношення періодів коливань на Землі (T_0) та на Церері (T) виражається через прискорення вільного падіння на даних тілах і дорівнює 0.16 м/с :

$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g}{g_0}} = 0.16, \quad (2 \text{ бали})$$

якщо для Землі взяти $g=9.8 \text{ м/с}^2$

Отже хід маяткового годинника на Церері буде у 6.3 рази повільніший ніж на Землі.

Задача 2. Аеростат на Венері. (10 балів) В атмосфері Венери, приблизно на висоті 50 кілометрів над поверхнею, фізичні умови дуже подібні до земних: тиск 0.1 МПа, температура 300°К. Виникає ідея зробити пілотований аеростат, що буде тривалий час дрейфувати в атмосфері Венери. При цьому підйомну силу буде створювати звичайне земне повітря у внутрішньому просторі для екіпажу. Розрахуйте об'єм такого аеростату, який би мав підйомну силу 1МН. (Атмосфера Венери практично цілком складається з CO₂).

Розв'язок.

По-перше, треба розрахувати масу 1м³ повітря (молярна маса 29) та вуглекислого газу CO₂ (молярна маса 44) при заданих умовах. Згідно з формулою Менделєєва-Клапейрона $\rho = \frac{\mu P}{RT}$ отримуємо 1.16 кг/м³ для повітря та 1.76 кг/м³ для CO₂. (3 бали)

Наступним кроком треба прийняти до відома, що прискорення вільного падіння на Венері трохи менше за земне $g_{\text{венери}} \approx 0.9g_{\text{землі}} \approx 9\text{м/с}^2$. (Цей факт можна просто пам'ятати, а можна й розрахувати, знаючи масу та радіус Венери, найкраще – в одиницях маси і радіусу Землі). (2 бали)

Таким чином, кожен кубічний метр повітря створює в атмосфері Венери Архімедову силу:

$$f = g_B(\rho_{\text{CO}_2} - \rho_{\text{Air}}) = 9 \cdot (1.76 - 1.16) = 5.4 \text{ Н.} \quad (3 \text{ бали})$$

Щоб отримати повну підйомну силу 1МН треба мати об'єм аеростату:

$$V = F/f = 10^6/5.4 = 185\,000\text{м}^3. \quad (2 \text{ бали})$$

Задача 3. Астероїдна небезпека. (10 балів). Обчисліть енергію, яка виділиться під час падіння на Землю астероїда діаметром 10 м (Челябінський метеорит) та 1 км, приймаючи густину його речовини 2.5 г/см^3 . Результат виразіть в тротиловому еквіваленті, та порівняйте з найпотужнішою водневою бомбою АН602 (58 мегатонн ТНТ), яку коли-небудь було випробувано. Енергетичний еквівалент тротилу (ТНТ) 4.2 Мдж/кг .

Розв'язок.

Енергія, яка виділяється під час падіння астероїду за своїм походженням є кінетичною. Щоб розрахувати її, треба оцінити швидкість падіння астероїду на Землю. Важливі два граничні випадки:

1) астероїд рухався відносно Землі з малою відносною швидкістю, бо його орбіта була дуже схожою на орбіту Землі ($a=1, e=0$). В цьому разі швидкість падіння на поверхню Землі буде практично дорівнювати другій космічній швидкості для Землі – 11.2 км.с . (2 бали)

2) астероїд рухався до доволі витягнутій, майже параболичній орбіті, яка пересікала орбіту Землі (це скоріше кометна ніж астероїдна орбіта!). В цьому випадку відносна швидкість буде дорівнювати різниці між коловою швидкістю Землі навколо Сонця – 30 км/с , та параболичною – 42 км/с , а впливом тяжіння Землі можна знехтувати. (2 бали)

В обох випадках гальмуванням в атмосфері Землі нехтуємо, бо воно несуттєве для таких великих тіл, про які йде мова. Атмосфера важлива для тіла, маса якого порівняльна з масою повітря в стовпі атмосфери з таким самим перерізом, як переріз тіла – то значить при діаметрі десь до 2 м. (1 бал)

Приймаючи швидкість від 10 до 14 км/с обчислимо кінетичну енергію одного кілограма маси астероїду: $\varepsilon = \frac{v^2}{2}$, отримуючи від $5 \cdot 10^7$ до $10^8 \text{ м}^2/\text{с}^2 = \text{Дж/кг}$. (1 бал)

Порівнюючи це з 4.2 МДж/кг у тринітротолуолу, знаходимо, що кожен кілограм маси астероїду еквівалентний від 12 до 24 кг ТНТ. (1 бал)

Залишилося лише розрахувати маси астероїду з діаметрами 10 м та 1 км:

$$M = \rho V = \frac{\pi}{6} \rho D^3 = 1.3 \cdot 10^6 \text{ кг (для діаметру 10 м) або } 1.3 \cdot 10^{12} \text{ кг (1 км)}, \quad (1 \text{ бал})$$

Повна енергія $E = \varepsilon M$ в джоулях, еквіваленті ТНТ та в одиницях АН602: (2 бали)

Швидкість падіння	10 км/с	14 км/с
Діаметр		
10 м	$6.5 \cdot 10^{13} \text{ Дж} = 15 \text{ КТ} = 1 \text{ Хіросима}$	$1.3 \cdot 10^{14} \text{ Дж} = 15 \text{ GT} = 260 \text{ АН-602}$
1 км	$6.5 \cdot 10^{19} \text{ Дж} = 30 \text{ КТ} = 2 \text{ Хіросими}$	$1.3 \cdot 10^{20} \text{ Дж} = 30 \text{ GT} = 520 \text{ АН-602}$

Задача 4. Міжорбітальний переліт. (10 балів) При перельоті з однієї космічної станції, що рухалась по коловій орбіті з радіусом R_1 , на іншу, що рухалась по тій же орбіті, але попереду першої на відстані $L=3000$ км, космонавти загальмували свій корабель, перейшли на нижчу проміжну орбіту радіусом R_2 , і за $t=30$ годин наздогнали другу станцію. Визначити на скільки кілометрів проміжна орбіта нижча за основну. Висоти орбіт над поверхнею Землі значно менші радіуса Землі.

Розв'язок.

Корабель на проміжній орбіті за час t пройде шлях $\omega_1 R_1$, а станція за той же час t пройде шлях $\omega_2 R_2$. Звідси знаходимо:

$$\omega_1 R_1 t - \omega_2 R_2 t = (\omega_1 R_1 - \omega_2 R_2) t \approx (\omega_1 - \omega_2) t R \approx L$$

$$\frac{L}{Rt} = (\omega_1 - \omega_2) \quad (3 \text{ бали})$$

У той же час $\omega_{1,2} = \frac{v}{R} = \sqrt{\frac{GM}{R_{1,2}^3}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R_{1,2}^3}}$

$$(\omega_1 - \omega_2) = \sqrt{gR^2} \left(\frac{1}{R_1^{3/2}} - \frac{1}{R_2^{3/2}} \right) = \sqrt{gR^2} \left(\frac{1}{(R_2 - \Delta R)^{3/2}} - \frac{1}{R_2^{3/2}} \right) \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{g}{R}} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\Delta R}{R}\right)^{3/2}} - 1 \right) \approx \sqrt{\frac{g}{R}} \left(\frac{\left(1 - \frac{\Delta R}{R}\right)^3 - 1}{\left(1 - \frac{\Delta R}{R}\right)^{3/2} + 1} \right) \approx \sqrt{\frac{g}{R}} \frac{3\Delta R}{2R}.$$

$$\Delta R = \frac{2L}{3t} \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (7 \text{ балів})$$

Підставляючи числові значення отримаємо $\Delta R=15$ км.

Задача 5. Обертання астероїда. (10 балів) Згідно з сучасними поглядами, деякі з астероїдів не є суцільними тілами, а складаються з окремих фрагментів, що утримуються разом лише силами взаємного тяжіння. Розрахувати найменший можливий період осьового обертання такого астероїда, приймаючи густину матеріалу 2.5 г/см^3 . Розглянути два граничні випадки:

- сферична купа дрібного каміння (англійською – «tumble pile»)
- дві сферичні кам'яні брили (контактно-подвійний астероїд)

Розв'язок.

1 випадок. Для такого тіла рівновага буде доти, доки інерційна відцентрове прискорення на поверхні не перевищить гравітаційного прискорення: $\frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2 R} \leq \frac{GM}{R^2} = \frac{4\pi G \rho R^3}{3R^2}$, (3 бали),

звідки отримуємо період обертання $T \geq \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} \approx 2.2$ години. (2 бали).

2 випадок. Для таких тіл рівновага буде доти, доки інерційна відцентрова сила не перевищить силу притягання двох тіл: $\frac{Mv^2}{R} \leq \frac{GM^2}{R^2}$ (3 бали), що, після аналогічних підстановок приводить до

періоду обертання $T \geq \sqrt{\frac{12\pi}{G\rho}} \approx 4.4$ год. (2 бали).

Задача 6. Геостационар–UA. (15 балів) На геостационарну орбіту потрібно вивести супутник на якому буде встановлено телескоп для моніторингу навколишнього середовища України. Розрахуйте фокусну відстань об'єктива та загальний розмір приймача зображення (ПЗЗ-матриці) так, щоб можна було спостерігати деталі на поверхні Землі розміром не менше 100 метрів, а загальне прямокутне поле зору охоплювало б усю Україну: від $44^\circ.5$ до $52^\circ.5$ північної широти, та від 22° до 41° східної довготи. Розмір одного пікселя приймача 5 мкм.

Розв'язок

Спочатку визначимо радіус геостационарної орбіти (на цій орбіті час обертання супутника навколо Землі дорівнює часу обертання Землі навколо власної осі), тобто супутник висить над деякою точкою на Землі. Для тіла, що обертається навколо Землі по коловій орбіті на деякій відстані швидкість буде: $v = (GM/r)^{1/2}$ (3 бали), час обертання $T = 2\pi r/v$ (1 бал), звідси одержимо радіус геостационарної орбіти: $r = (GMT^2/4\pi^2)^{1/3} = (6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 5.97 \cdot 10^{24} (24 \cdot 3600/4\pi^2)^{1/3}) \approx 42300$ км. (2 бали).

Далі визначимо розмір України в кілометрах та у кутових градусах, відносно супутника. Розмір України в кілометрах: ширина $b = (52^\circ.5 - 44^\circ.5) \cdot 2\pi R/360^\circ \approx 890$ км (1 бал), довжину будемо розраховувати на широті $48^\circ.5$: $a = (41^\circ.0 - 22^\circ.0) \cdot \cos(48^\circ.5) \cdot 2\pi R/360^\circ \approx 1400$ км. (1 бал).

Визначимо відстань від супутника до точки з координатами $48^\circ.5$ північної широти та $31^\circ.5$ східної довготи: $l = ((r - R\cos(48^\circ.5))^2 + (R\sin(48^\circ.5))^2)^{1/2} \approx 38400$ км. (1 бал).

Оскільки Україну видно з супутника під деяким кутом, то скорегуємо розмір (ширину) за рахунок цього кута. Величина кута буде: $\varepsilon = 48^\circ.5 + \arccos((r - R\cos(48^\circ.5))/l) \approx 56^\circ$, а видимий розмір $b1 = b\cos(56^\circ) \approx 500$ км (2 бали).

Розрахуємо кутовий розмір України, видимий з супутника: $\text{tg}(\alpha) = a/l$, $\text{tg}(\beta) = b1/l$, отримуємо $\alpha \times \beta \approx 2^\circ \times 1^\circ$ (1 бал). Будемо вважати також, що гранична роздільна здатність телескопа обумовлена тільки розміром одного пікселя, і, виходячи з цього, обчислимо розмір приймача та фокусну відстань, щоб поле зору було $2^\circ \times 1^\circ$. Розмір приймача буде 14000×7000 пікселів, або, враховуючи розмір пікселя 5 мікрометрів – $70\text{мм} \times 35\text{мм}$, щоб мати таке поле зору фокусна відстань повинна дорівнювати $F = 35\text{мм} \cdot 180/\pi \approx 2$ м (3 бали).