Решение задач
10 класс

Задача 1. (5 баллов).

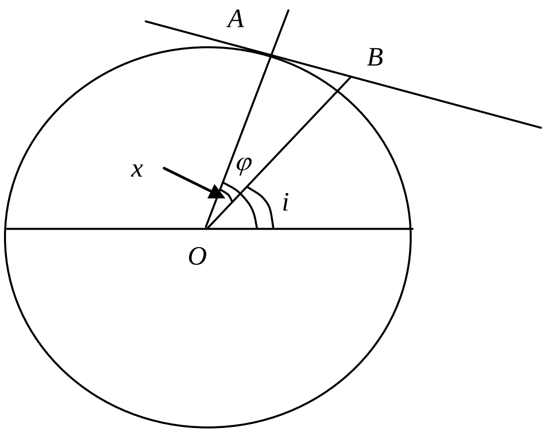
Если стать спиной к точке юга, т.е. к направлению на Южный полюс, то Солнце взойдет на востоке со стороны Новой Зеландии, наибольшей высоты достигнет над точкой севера и зайдет на западе. (2 балла). При этом движение Солнца будет происходить справа налево, в отличие от северного полушария, где оно движется слева направо. (2 балла). Максимальной высоты в меридиане Солнце достигает в декабре, минимальной – в июне. (1 балл).

Задача 2. (5 баллов).

Для возможности наблюдения станция должна находиться над горизонтом. МКС может находиться в зените в пунктах с максимальной широтой, равной наклонению орбиты, т.е. 51,6 градуса. (2 балла). Чтобы найти широту, где станция находится на горизонте необходимо найти угол x (смотри рисунок ниже), тогда искомая широта будет равна $\varphi = i + x$, где i – наклон плоскости орбиты станции к плоскости экватора Земли. Очевидно из треугольника OAB:

$$\cos x = R_{\oplus}/(R_{\oplus}+h) = 6371/(6371+350)$$

Откуда, $x = 18{,}6^0$, а $\varphi = 51{,}6^0 + 18{,}6^0 = 70{,}2^0$ (2 балла). То есть теоретически можно было бы её увидеть, если бы поглощение в атмосфере не ослабляло её блеск в 40 раз. (1 балл).



Задача 3. (15 баллов).

Поскольку положение планеты неизвестно, то антенну необходимо ориентировать на звезду. Очевидно, что максимальное угловое расстояние от звезды до планеты будет составлять 0,288″ × 0,6 = 0,173″, т.е. минимальная ширина луча должна составлять 0,346″. (4 балла). Наиболее существенным, с точки зрения наведения на звезду, является смещение звезды на небесной сфере вследствие её движения в пространстве. При этом, если смещение за год равно μ секунд дуги, то за время прохождения сигнала к звезде, смещение достигнет $\mu \times x$, где x - расстояние до звезды, выраженное в световых годах. (5 баллов). Однако, видимые координаты звезды соответствуют её положению на небесной сфере, которое она занимала x лет назад. Таким образом, общее смещение должно быть удвоено и равно $2\mu \times x$, т.е. антенна должна наводиться с упреждением на этот угол. (6 баллов).

Конкретно для этой звезды расстояние в парсеках будет равно 1/0,288 = 3,47 пк, или 3,47 × 3,26 = 11,32 св. года. Для этой звезды μ = 4,69″, значит 4,69″ × 2 ×11,32 = 106,2″, т.е. больше чем в два раза, что значительно больше максимального углового расстояния планеты от звезды.

Задача 4. (15 баллов)

а. Первое несоответствие в том, что октябрь – месяц, идущий после дня осеннего равноденствия, следовательно, продолжительность дня не может быть больше 12 часов.

б. Второе несоответствие состоит в том, что, вычитая из времени захода (17 ч 08 м) время восхода (05 ч 44 м), никак не удается получить продолжительность дня 12 ч 16 м (1 балл). Видимо, автор запутался в «несложных математических выкладках» и в тексте ***ошибочна продолжительность дня***. Поэтому исправим продолжительность дня: 17ч 08м – 5ч 44м = 11ч 24м. В тексте следует читать «***… долготу дня равной одиннадцати часам и двадцати четырем минутам***» (2 балла).

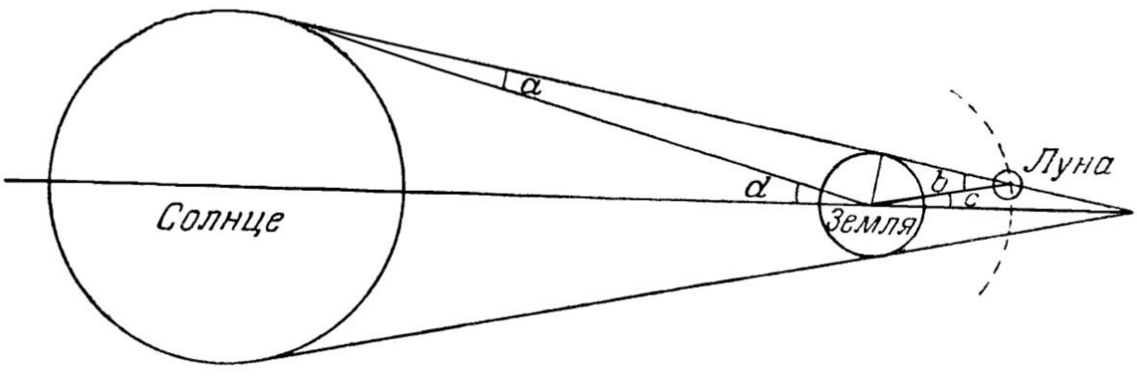
в. Взяв среднее между моментами восхода и захода, получаем 11 ч 26 м, то есть истинный полдень наступил на 34 минуты раньше 12 ч. (2 балла). Время определяется углом поворота Земли относительно Солнца. Стало быть, время в Москве опережает время в пункте, где Солнце достигает наибольшей высоты над точкой юга ровно в 12 часов. Долгота этого пункта составляет ровно 30 градусов. (2 балла).

г. В случае, если бы действовало летнее время (перевод часов на час вперед), полдень наступал бы не около 12 ч, а около 13 ч. Поскольку этого нет, делаем вывод, что в октябре 1928 года в Москве ***летнее время не действовало*** (3 балла).

д. Как известно, в день осеннего равноденствия (23 сентября) продолжительность дня равна 12 часам, тогда, если она убывает в последующие дни примерно на 4 минуты за сутки, она убудет на 36 минут (12 ч – 11 ч 24 м) за 9 дней. Прибавляя к 23 сентября 9 дней, получаем 2 октября. Поскольку расчет приближенный, можно утверждать, что приведенный отрывок относится к ***началу*** октября (5 баллов).

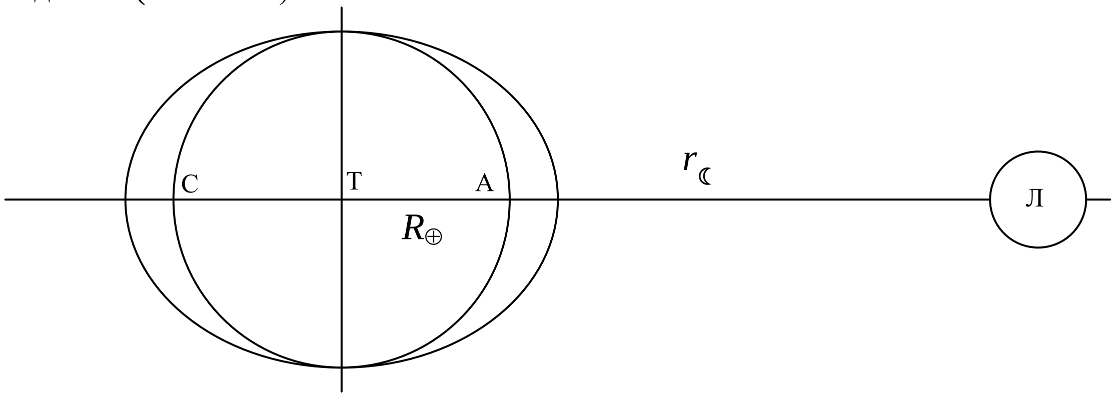
Задача 5. (30 баллов)

1. Для решения задачи необходимо определить угол, под которым с центра Луны виден радиус Земли. (8 баллов). На рисунке, изображающем тень Земли во время лунного затмения, a и b – углы, под которыми с Солнца и Луны виден радиус Земли, а d - угол под которым виден радиуса Солнца. (8 баллов). Угловая полуширина тени (угол c) может быть найдена из астрономических наблюдений, при измерении относительно звёзд центра Луны в начале и конце затмения. Угол d - это угловой радиус Солнца, который можно измерить наблюдая Солнце на закате или восходе, чтобы оно не слепило глаза. (7 баллов). Поскольку Солнце находится намного дальше Луны, что было известно еще в древности, углом a можно пренебречь, тогда угол $b = c + d$. (4 баллов). Радиус Земли к этому времени был уже известен, т.е. расстояние до Луны можно выразить в радиусах Земли. (3 балла).



2. Другой способ решения этой задачи в измерении времени прохождения Луны через тень с помощью водяных часов (клепсидры). Зная скорость движения Луны относительно тени, равную $360^0/29{,}53^d = 12{,}2^0$ в сутки, можно обойтись без угломерных инструментов. (7 баллов)

Задача 6. (30 баллов)



Задача предполагает нахождение разности ускорения, вызванного Луной (или Солнцем) в центре Земли (T) и в точках A или C на поверхности Земли. На основании закона всемирного тяготения в точке Т ускорение $a_T = GM_{☾}/r_{☾}^2$, где $M_{☾}$ - масса Луны, а $r_{☾}$ – расстояние от центра Земли до центра Луны. В точке А $a_A = GM_{☾}/(r_{☾} - R_\oplus)^2$, где $R_\oplus$ - радиус Земли. $a_C = GM_{☾}/(r_{☾} + R_\oplus)^2$. (8 баллов).

Разность ускорений в точках A и T равна:

$\Delta a = a_A - a_T = GM_{☾}(1/(r_{☾} - R_\oplus)^2 - 1/r_{☾}^2) = GM_{☾}(2r_{☾}R_\oplus - R_\oplus^2)/(r_{☾}^4 - 2r_{☾}^3R_\oplus + r_{☾}^2R_\oplus^2)$. (4 балла). Учитывая, что расстояние до Луны существенно больше радиуса Земли, приближенно получим: $\Delta a \approx 2GM_{☾}R_\oplus/r_{☾}^3$. (Если бы мы взяли разность $a_T - a_C$, то в этом приближении мы получили бы точно такой же результат). (6 баллов).

Или, подставляя численные значения, находим: $\Delta a = 1{,}103\times10^{-6}$ м/с^2 = $1{,}13\times10^{-7}$g, где g – ускорение свободного падения на Земле. (4 балла).

Аналогичная величина для Солнца составляет $M_\odot r_{☾}^3/(M_{☾} r_\odot^3) = 0.46$ от вычисленных ранее величин для Луны, т.е. – в 2,2 раза меньше. (4 балла).

Описанные приливы называются «полусуточными», так как наступают примерно через половину календарных суток. Однако, как мы видим, ускорение, вызванное Луной существенно больше, чем ускорение от Солнца. Поэтому между последовательными приливами проходит половина не солнечных, а «лунных» суток, которые длиннее солнечных. Полный оборот в 360 град Луна делает за 27,32 солнечных суток, то есть за сутки Луна относительно звезд продвинется на 13,2 градуса к востоку, и будет кульминировать на $(13{,}2/15)\times60 = 52{,}8$ минуты позже. Поскольку приливов в сутки два – промежуток времени между ними составляет примерно 12 ч 25 м. (4 балла).

Хотя это запаздывание и не постоянно, ввиду эллиптичности орбиты Луны.

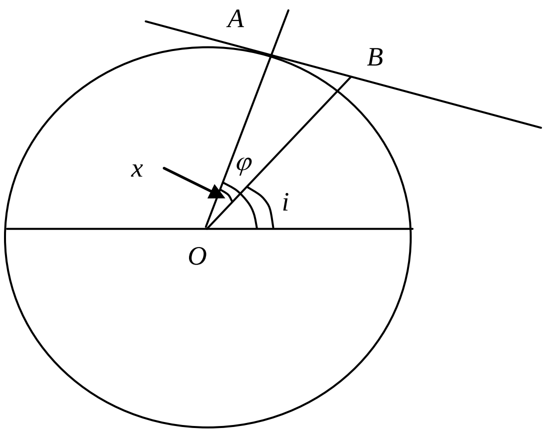
Розв’язок задач
10 клас

Задача 1. (5 балів).
Якщо стати спиною до точки півдня, тобто до напрямку на Південний полюс, то Сонце зійде на сході зі сторони Нової Зеландії, найбільшої висоти досягає над точкою півночі і зайде на заході. (2 бали). При цьому рух Сонця буде проходити справа наліво, відрізняючись від північної півкулі, де воно рухається зліва направо. (2 бали). Максимальної висоти в меридіані Сонце досягає в грудні, мінімальної – в червні. (1 бал).

Задача 2. (5 балів).
Для можливості спостереження станція повинна знаходитись над горизонтом. МКС може знаходитись в зеніті в пунктах з максимальною широтою, що дорівнює нахилу орбіти, тобто 51,6 градуса. (2 бали). Для того, щоб знайти широту, де станція знаходиться на горизонті необхідно знайти кут x (дивись рисунок нижче), тоді шукана широта буде дорівнювати $\varphi = i + x$, де i – нахил площини орбіти станції до площини екватора Землі. Як видно з трикутника OAB:

$$\cos x = R_{\oplus}/(R_{\oplus}+h) = 6371/(6371+350)$$

Звідкіля, $x = 18{,}6^0$, а $\varphi = 51{,}6^0 + 18{,}6^0 = 70{,}2^0$ (2 бали). Тобто теоретично можливо було б її побачити, якщо б поглинання в атмосфері не ослабляло її блиск в 40 разів. (1 бал).



Задача 3. (15 балів).
Оскільки положення планети невідомо, то антену необхідно зорієнтувати на зорю. Очевидно, що максимальна кутова відстань від зорі до планети буде складати $0{,}288'' \times 0{,}6 = 0{,}173''$, тобто мінімальна ширина променя повинна складати $0{,}346''$. (4 бали). Найбільш значимим, з точки зору наведення на зорю, є зміщення зорі на небесній сфері внаслідок її руху в просторі. При цьому, якщо зміщення за рік дорівнює μ секунд дуги, то за час проходження сигналу до зорі, зміщення досягне $\mu \times x$, де x - відстань до зорі, виражена в світових роках. (5 балів). Однак, видимі координати зорі відповідають її положенню на небесній сфері, яке вона займала x років тому назад. Таким чином, загальне зміщення повинно бути подвоєно і дорівнює $2\mu \times x$, тобто антена повинна наводитись з упередженням на цей кут. (6 балів).

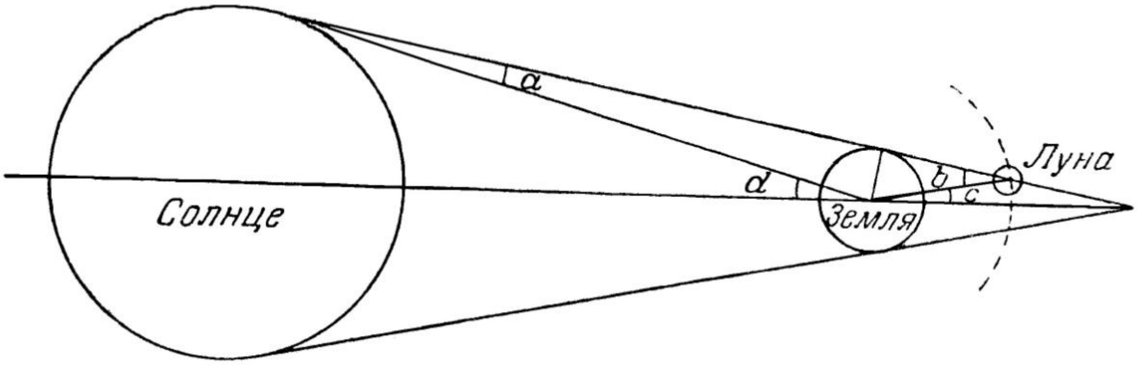
Конкретно для цієї зорі відстань у парсеках буде дорівнювати 1/0,288 = 3,47 пк, або $3{,}47 \times 3{,}26 = 11{,}32$ св. років. Для цієї зорі $\mu = 4{,}69''$, значить $4{,}69'' \times 2 \times 11{,}32 = 106{,}2''$, тобто більше чим в два рази, що значно більше максимального кутової відстані планети від зорі.

Задача 4. (15 балів).
а. Перша невідповідність у тому, що жовтень – місяць, що наступає після дня осіннього рівнодення, значить, тривалість дня не може бути більше 12 годин. (2 бали).

б. Друга невідповідність полягає в тому, що, віднімаючи від часу заходу (17 год 08 хв) час сходу (05 ч 44 м), ніяк не вдається одержати тривалість дня 12 год 16 хв (1 бал). Видно, автор заплутався в «нескладних математичних викладках» і в тексті ***помилкова тривалість дня***. Для цього виправимо тривалість дня: 17 год 08 хв – 5 год 44 хв = 11 год 24 хв. В тексті слідує читати «***… долготу дня равной одиннадцати часам и двадцати четырем минутам***».
в. Беручи середнє значення між моментами сходу і заходу, одержуємо 11 год 26 хв, тобто істинний полудень наступило на 34 хвилини раніше 12 ч. (2 бали). Час визначається кутом повороту Землі відносно Сонця. Тоді, час у Москві випереджує час у пункті, де Сонце досягає найбільшої висоти над точкою півдня рівно о 12 годині. Довгота цього пункту складає рівно 30 градусів. (2 бали).
г. У випадку, якщо б діяв літній час (перевод часів на час вперед), полудень наступав би не біля 12 год, а біля 13 год. Оскільки цього нема, робимо вивід, що в жовтні 1928 року в Москві ***літній час не вводився*** (3 бали).
д. Як відомо, в день осіннього рівнодення (23 вересня) тривалість дня дорівнює 12 годинам, тоді, якщо вона зменшується в наступні дні приблизно на 4 хвилини за добу, вона зменшиться на 36 хвилин (12 год – 11 год 24 хв) за 9 днів. Прибавляючи до 23 вересня 9 днів, одержуємо 2 жовтня. Оскільки розрахунок наближений, можна стверджувати, що наведений уривок відноситься до ***початку*** жовтня (5 балів).

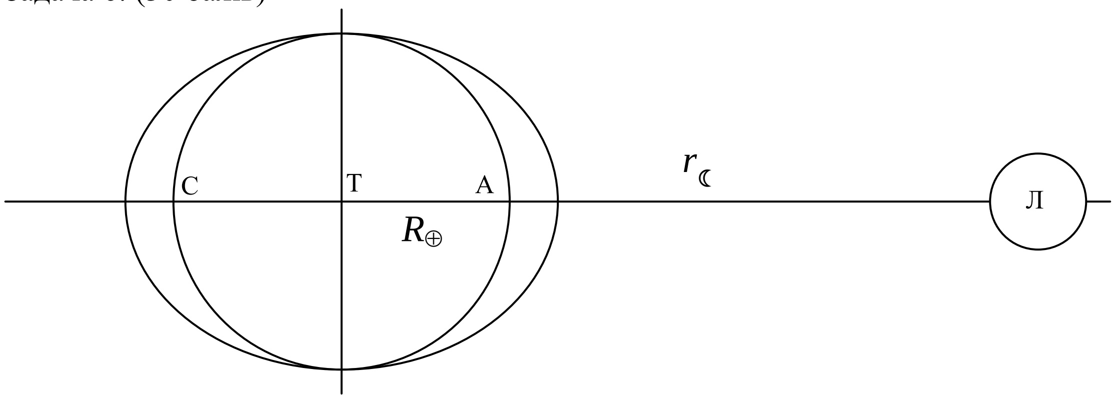
Задача 5. (30 балів)

1. Для розв’язання задачі необхідно визначити кут, під яким з центра Місяця видно радіус Землі. (8 балів). На рисунку, що зображує тінь Землі під час місячного затемнення, a і b – кути, під якими з Сонця і Місяця видно радіус Землі, а d - кут під яким видно радіус Сонця. (8 балів). Кутова півширина тіні (кут c) може бути знайдена із астрономічних спостережень, при вимірюванні відносно зір центра Місяця на початку та в кінці затемнення. Кут d – це кутовий радіус Сонця, який можна виміряти спостерігаючи Сонце на заході або сході, щоб воно не засліплювало очі. (7 балів). Оскільки Сонце знаходиться набагато далі Місяця, що було відомо ще в древності, кутом a можна знехтувати, тоді кут $b = c + d$. (4 бали). Радіус Землі до цього часу був уже відомий, тобто відстань до Місяця можна виразити в радіусах Землі. (3 бали).



2. Другий спосіб розв’язку цієї задачі в вимірі часу проходження Місяця через тінь за допомогою водяного годинника (клепсидри). Знаючи швидкість руху Місяця відносно тіні, що дорівнює $360^0/29{,}53^d = 12{,}2^0$ за добу, можна обійтись без кутомірних інструментів. (7 балів)

Задача 6. (30 балів)



Задача припускає находження різниці прискорень, викликаних Місяцем (або Сонцем) у центрі Землі (T) і в точках A або C на поверхні Землі. На основі закону всесвітнього тяжіння в точці T прискорення $a_T = GM_{\leftmoon}/r_{\leftmoon}^2$, де $M_{\leftmoon}$ - маса Місяця , а $r_{\leftmoon}$ – відстань від центра Землі до центра Місяця. В точці A $a_A = GM_{\leftmoon}/(r_{\leftmoon} - R_{\oplus})^2$, де $R_{\oplus}$ - радіус Землі. $a_C = GM_{\leftmoon}/(r_{\leftmoon} + R_{\oplus})^2$. (8 балів).

Різниця прискорень в точках A і T дорівнює:

$\Delta a = a_A - a_T = GM_{\leftmoon}(1/(r_{\leftmoon} - R_{\oplus})^2 - 1/r_{\leftmoon}^2) = GM_{\leftmoon}(2r_{\leftmoon}R_{\oplus} - R_{\oplus}^2)/(r_{\leftmoon}^4 - 2r_{\leftmoon}^3R_{\oplus} + r_{\leftmoon}^2R_{\oplus}^2)$. (4 бали).

Враховуючи, що відстань до Місяця значно більше радіуса Землі, наближено одержимо: $\Delta a \approx 2GM_{\leftmoon}R_{\oplus}/r_{\leftmoon}^3$. (Якщо б ми взяли різницю $a_T - a_C$, то в цьому наближенні ми одержали б точно такий же результат). (6 балів).

Або, підставляючи чисельні значення, знаходимо: $\Delta a = 1{,}103\times10^{-6}$ м/с^2 = $1{,}13\times10^{-7}$g, де g – прискорення вільного падіння на Землі. (4 бала).

Аналогічна величина для Сонця складає $M_{\odot}r_{\leftmoon}^3\ /(M_{\leftmoon}r_{\odot}^3) = 0.46$ від обчислених раніше величин для Місяця, тобто – у 2,2 рази менше. (4 бали).

Описані приливи називаються «півдобовими», так як наступають приблизно через половину календарних діб. Однак, як ми бачимо, прискорення, що викликає Місяць значно більше, чим прискорення від Сонця. Тому між послідовними припливами проходить половина не сонячних, а «місячних» діб, які довші за сонячні. Повний оберт у 360 град Місяць робить за 27,32 сонячних діб, тобто за добу Місяць відносно зір пройде на 13,2 градуси до сходу, і буде кульмінувати на (13,2/15)×60 = 52,8 хвилин пізніше. Оскільки припливів за добу два – проміжок часу між ними дорівнює приблизно 12 год 25 хвилин (4 бала).

Хоч це запізнення і не постійне, зважаючи на еліптичність орбіти Місяця.