

Курс «Космічна картографія»

Лекція 04

Перспективна проекція для випадку планет довільної форми

Корохін Віктор Валентинович

v.v.korokhin@gmail.com

Institute of Astronomy,
Kharkiv V.N. Karazin National University, Ukraine

2017.09.18, Харків

План лекції

- 1. Постановка задачі.**
- 2. Основні системи координат.**
- 3. Параметри, які задають проекцію.**
- 4. Перехід від прямокутних координат на площині перспективної проекції (на зображенні) до планетографічних координат.**
- 5. Перехід від планетографічних координат до прямокутних координат на площині перспективної проекції (на зображенні).**

Постановка задачі

Фігури різних тіл Сонячної системи

Косм. тіло	Полярне стиснення	Екв. радіус, км	Перепад висот, км	Перепад висот, в $R_{\text{екв}}$
Сонце	$9 \cdot 10^{-6}$	$6.9551 \cdot 10^5$		
Місяць	0.00125	1738.1	до 20	0.0115
Земля	0.0033528	6378,1	<u>19.842</u>	0.0031
Марс	0.00589	3396.2	до 35-37	0.0106
Юпітер	0.06487	71492.0		
Сатурн	0.09796	60268.0		
Астероїди і комети				

Фігури багатьох космічних тіл далекі від сфери, і на багатьох з них складний рельєф (перепади висот)

**E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, V.V. Korokhin,
and O.S. Shalygina.**

Formulas of the Perspective Cartographic Projection for
Planets and Asteroids of Arbitrary Shape

Формули опубліковані в роботах [1, 2, 3]

**Алгоритми реалізовані в рамках
програмної системи xIRIS
(БПК - Бібліотека планетних картографій)**

Опис фігури планети

1. Найбільш загальний вид

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

2. Еліпсоїд обертання

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \quad (2)$$

де A, B, C – піввісі еліпсоїда.

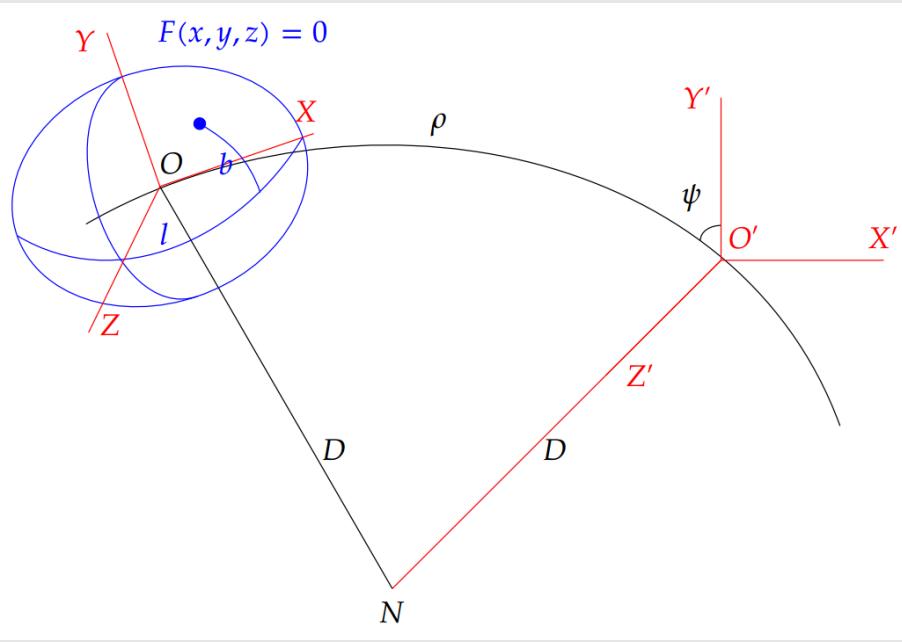
3. Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (3)$$

4. Сфера з картою локальних висот $h(x, y, z)$ (відхилення від сфери)

$$x^2 + y^2 + z^2 = (R + h(x, y, z))^2. \quad (4)$$

Основні системи координат

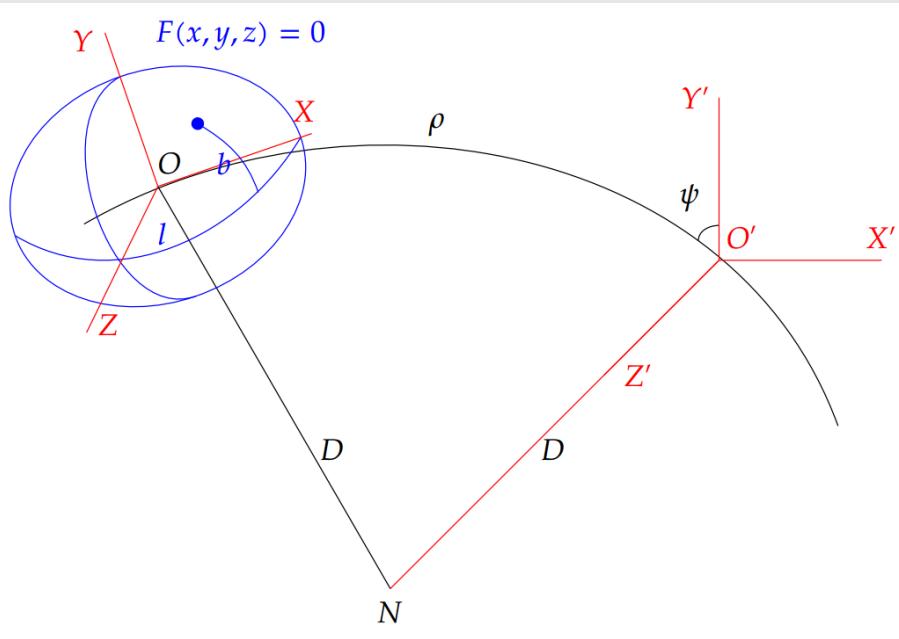


(x_P, y_P) – координати точки на площині зображення X_PNY_P .

(XYZ) – система координат (СК) з початком координат (ПК) в центрі планети O . направлена на півн. полюс. Вісь Z спрямована на точку з нульовими планетоцентрич. координатами $l = b = 0$.

$(X'Y'Z')$ – СК з ПК в точці перетину лінії візуування і площини проекції O' . Оси X' і Y' збігаються з осями X_P і Y_P на площині зображення. Вісь Z' спрямована на спостерігача N (точку проекції). $X'O'Y'$ – це площаина проекції (ПП). Координати спостерігача в цій СК $x' = y' = 0, z' = D$.

Параметри, які задають проекцію



D – відстань від спостерігача до центра планети і від спостерігача до ПП.

ρ – кут відхилення лінії візування від напрямку на центр планети (для КА - це відхилення від надира).

ψ – азимут цього відхилення.

Відраховується в площині зображення від позитивного напрямку осі Y' проти годин. стрілки. Для поперечної (екваторіальної, англ. vertical) проекції $\rho = \psi = 0$.

b_0, l_0 – планетографічні координати підспостережної точки.

У всіх СК координати відраховуються в одиницях (наприклад, в км або в екват. радіусах планети).

**Перехід від прямокутних координат
на площині перспективній проекції
(на зображенні)
до планетографічних координат**

$$(x_p, y_p) \rightarrow (l, b)$$

Етап А: $(x_p, y_p) \rightarrow (x, y, z)$

Перехід від прямокутних координат на зображені
до Декартових координат, пов'язаних з планетою

Рівняння лінії візуування в системі (XYZ) :

$$\frac{x - x_N}{x_A - x_N} = \frac{y - y_N}{y_A - y_N} = \frac{z - z_N}{z_A - z_N}, \quad (5)$$

де (x_N, y_N, z_N) – координати спостерігача, (x_A, y_A, z_A) – координати точки на площині проекції, що відповідає (x_p, y_p) .

Координати спостерігача:

$$\begin{cases} x_N = D \cdot \sin l_0 \cos b_0 \\ y_N = D \cdot \sin b_0 \\ z_N = D \cdot \cos l_0 \cos b_0 \end{cases}, \quad (6)$$

де l_0, b_0 – планетоцентричні координати спостерігача.

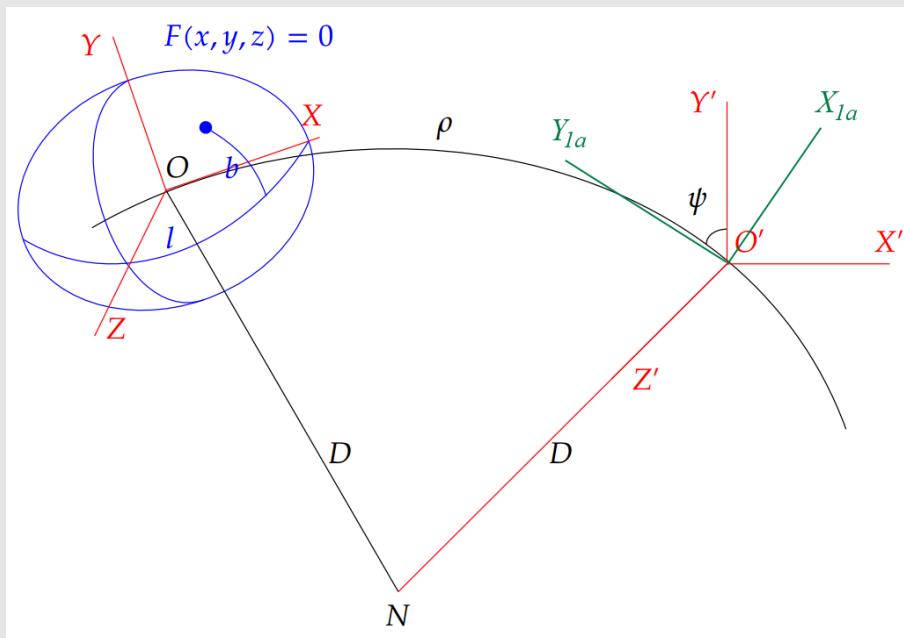
1. Перехід до системи координат (x_1, y_1, z_1) з початком в центрі планети

Виконується в 4 етапи:

(a) поворот \rightarrow (b) зсув \rightarrow (c) поворот \rightarrow (d) зсув.

**(1а) Поворот на кут ψ навколо осі Z' ,
щоб помістити
центр планети в площину $Y_{1a}O'Z_{1a}$**

$$\begin{bmatrix} x_{1a} \\ y_{1a} \\ z_{1a} \\ 1 \end{bmatrix} = MR_1^1 \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_1^1 = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

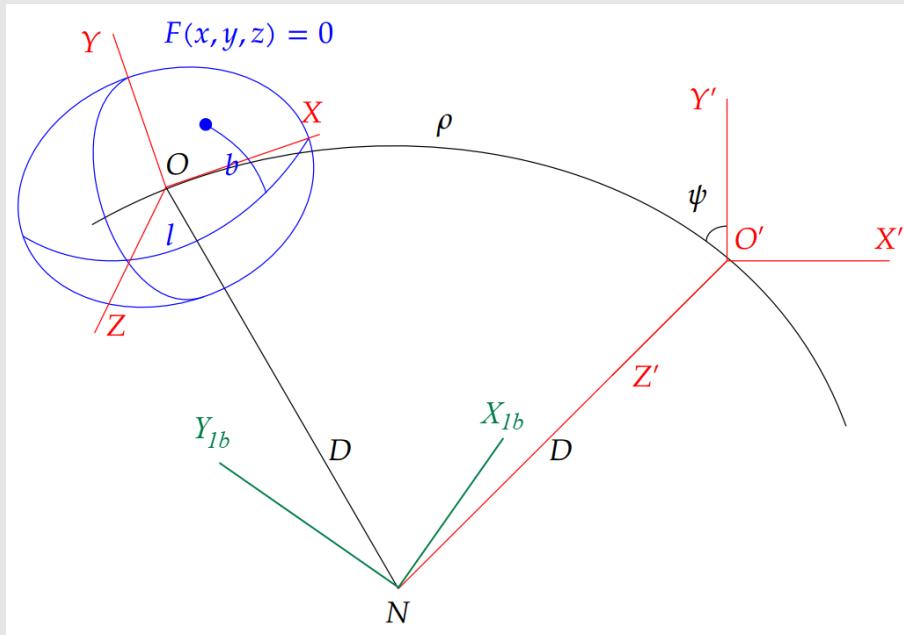


Запис в звичайній
формі:

$$\begin{cases} x_{1a} = x' \cdot \cos \psi + y' \cdot \sin \psi \\ y_{1a} = -x' \cdot \sin \psi + y' \cdot \cos \psi \\ z_{1a} = z' \end{cases}$$

(1b) Зсув початку координат в точку спостерігача N

$$\begin{bmatrix} x_{1b} \\ y_{1b} \\ z_{1b} \\ 1 \end{bmatrix} = MT_1^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{1a} \\ y_{1a} \\ z_{1a} \\ 1 \end{bmatrix} \quad MT_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

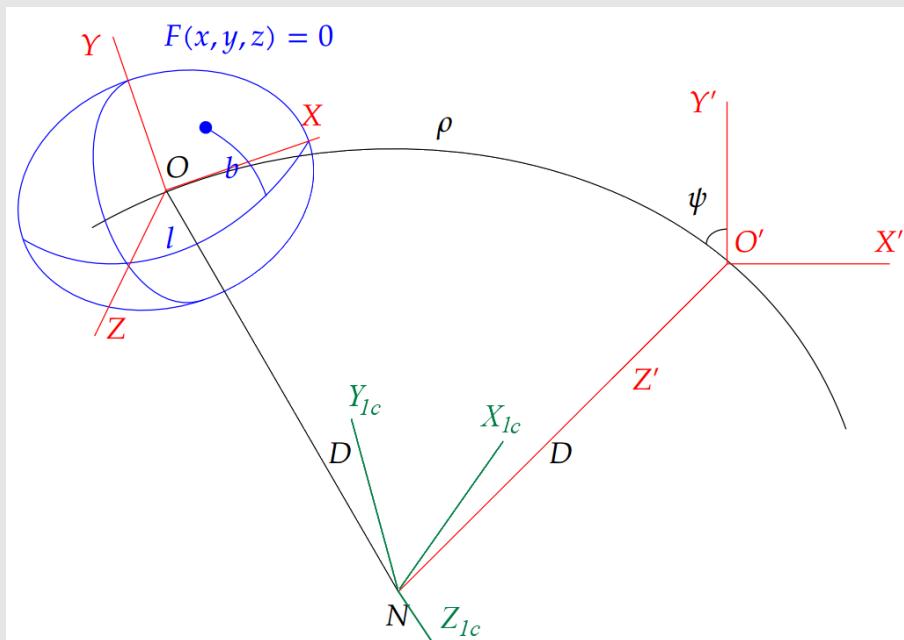


Запис в звичайній формі:

$$\begin{cases} x_{1b} = x_{1a} \\ y_{1b} = y_{1a} \\ z_{1b} = z_{1a} - D \end{cases}$$

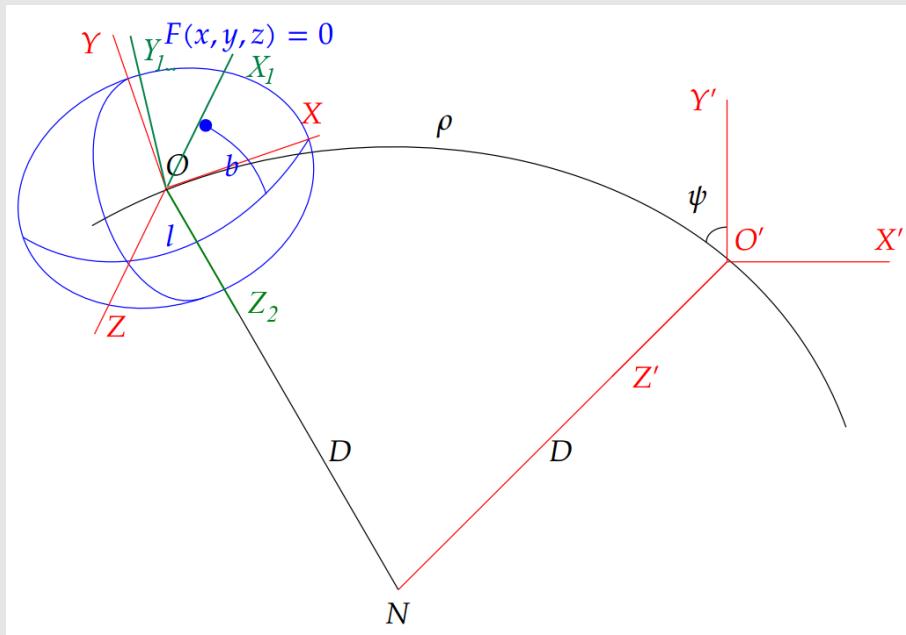
**(1c) Поворот на кут ρ навколо осі X_{1b} ,
щоб помістити
центр планети на вісь Z_{1c}**

$$\begin{bmatrix} x_{1c} \\ y_{1c} \\ z_{1c} \\ 1 \end{bmatrix} = MR_2^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{1b} \\ y_{1b} \\ z_{1b} \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \rho & \sin \rho & 0 \\ 0 & -\sin \rho & \cos \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$



(1d) Зсув початку координат в центр планети

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = MT_2^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{1c} \\ y_{1c} \\ z_{1c} \\ 1 \end{bmatrix} \quad MT_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$



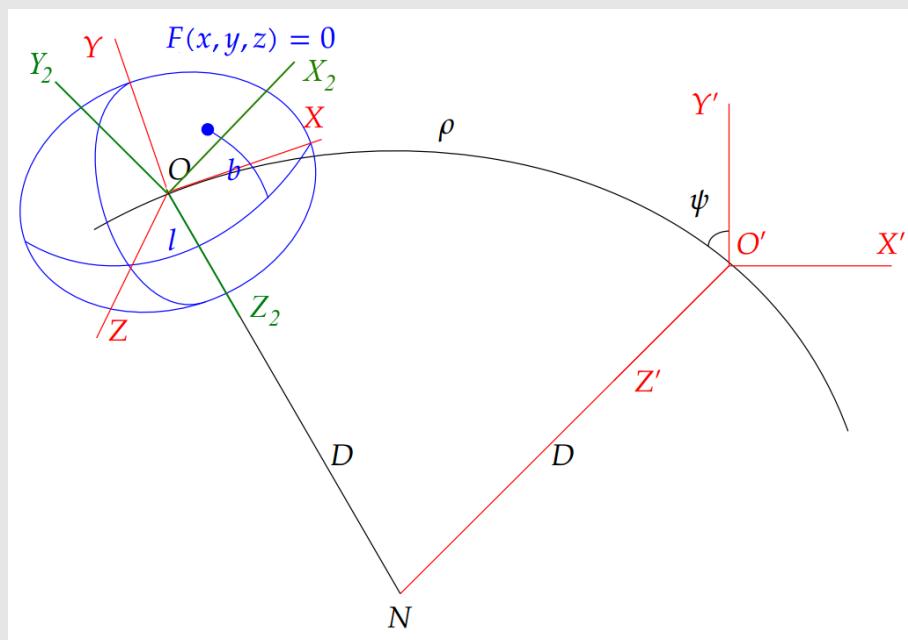
2. Поворот навколо осі Z_1 , щоб помістити центральний меридіан планети уздовж осі Y_2

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = MR_3^1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_3^1 = \begin{bmatrix} \cos(P_0 - \psi) & \sin(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ -\sin(P_0 - \psi) & \cos(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

де P_0 – позиційний кут проекції полярної осі планети на зображенні,

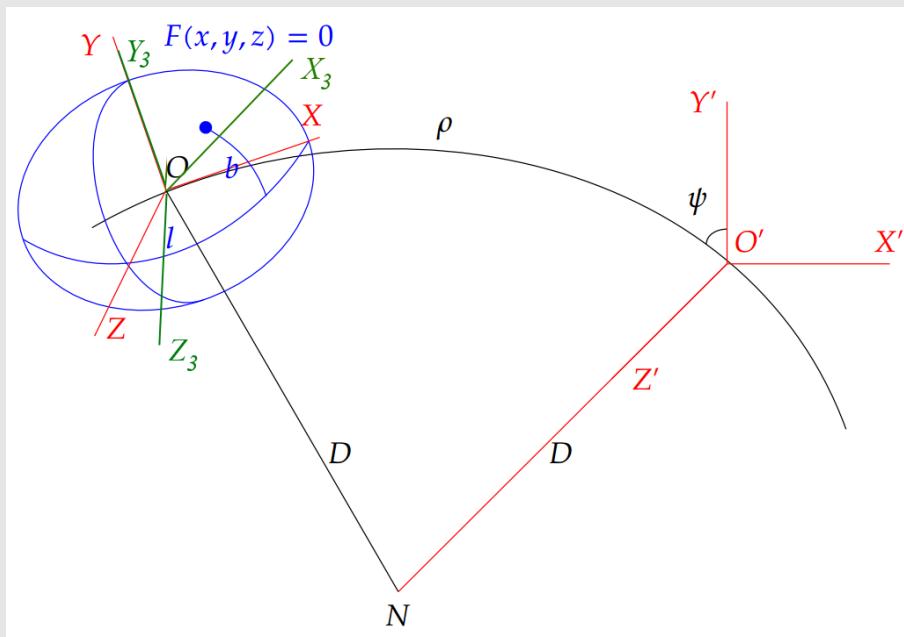
який відлічується від напрямку «північ - вгорі» проти годинникової стрілки.

$(P_0 - \psi)$ – позиційний кут, який відлічується від напрямку від центру планети до центру косої перспективної проекції.



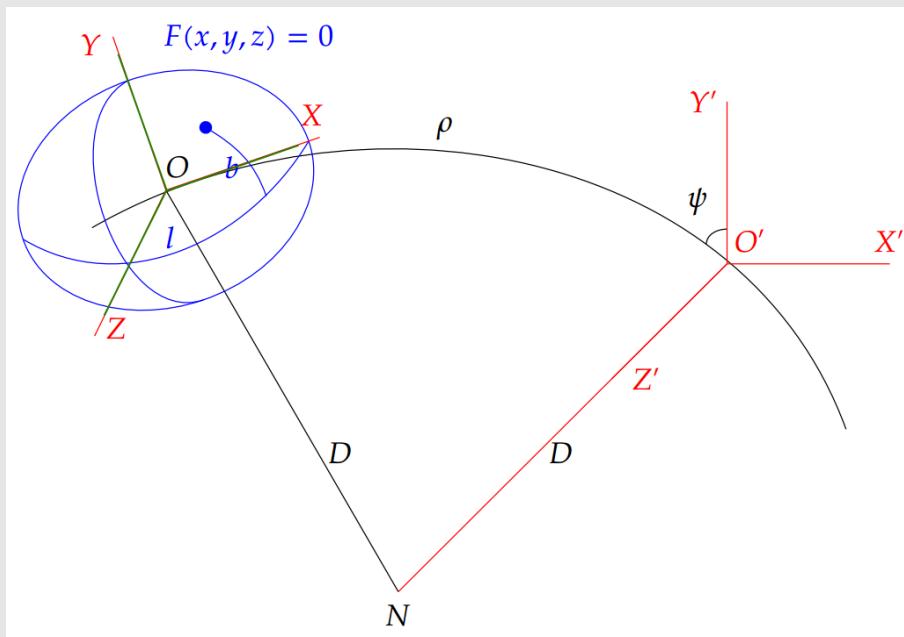
3. Поворот на кут b_0 навколо осі X_2 (лежить в площині екватора планети) з тим, щоб вісь Y_3 була спрямована на північний полюс планети:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = MR_4^1 \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_4^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b_0 & \sin b_0 & 0 \\ 0 & -\sin b_0 & \cos b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$



4. Поворот на кут l_0 навколо осі Y_3 , щоб вісь Z була спрямована на точку з нульовими планетограф. координатами:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = MR_5^1 \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad MR_5^1 = \begin{bmatrix} \cos l_0 & 0 & \sin l_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin l_0 & 0 & \cos l_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$



Процедура $(x_p, y_p) \rightarrow (x, y, z)$ в матричній формі

В нашому випадку $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A)$.

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{bmatrix} = MR_5^1 \cdot MR_4^1 \cdot MR_3^1 \cdot MT_2^1 \cdot MR_2^1 \cdot MT_1^1 \cdot MR_1^1 \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Для обчислення координат точки на поверхні планети (x, y, z) необхідно вирішити систему (5) разом з рівнянням (1). Необхідно знайти всі рішення – всі точки перетину прямої з поверхнею і вибрати точки, що знаходяться на мінімальній відстані:

$$d = (x_N - x)^2 + (y_N - y)^2 + (z_N - z)^2. \quad (15)$$

Випадок еліпсоїда

У випадку еліпсоїда (рівняння (2)) задача зводиться до вирішення квадратного рівняння:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{c_2} (-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_2(a_2^2 + a_4^2 - 1)}) \\ y = A(a_1 z + a_2) \\ z = B(a_3 z + a_4) \end{cases}, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} a_1 &= (1/A) \cdot (x_A - x_N) / (z_A - z_N), & a_2 &= x_N / A - a_1 \cdot z_N, \\ a_3 &= (1/B) \cdot (y_A - y_N) / (z_A - z_N), & a_2 &= y_N / B - a_3 \cdot z_N, \\ c_1 &= a_1 a_2 + a_3 a_4, & c_2 &= a_1^2 + a_3^2 + 1/C^2. \end{aligned}$$

Рішення з меншим d (15) відповідає ближній стороні планети.

Етап В: $(x, y, z) \rightarrow (l, b)$

Перехід від Декартових координат, пов'язаних з планетою, до планетографічних координат

За визначенням планетоцентричних координат (l, b) :

$$\begin{cases} b = \arcsin(y / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\ l = \arctan(x/z) - \pi \operatorname{sign}(z)(1 - \operatorname{sign}(z))/2 \end{cases} \quad (17)$$

*Завдяки застосуванню функції $\operatorname{sign}()$ вдається уникнути неоднозначності функції $\operatorname{arctg}()$. ($\operatorname{atan2}(x, y)$)

Перехід від планетографічних координат до прямокутних координат на площині перспективній проекції (на зображенні)

$$(l, b) \rightarrow (x_p, y_p)$$

Етап А: $(l, b) \rightarrow (x, y, z)$

Перехід від планетографічних координат
до декартових, пов'язаних з планетою

Координати точки на поверхні планети (x, y, z) знаходяться шляхом рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} x \cos l - z \sin l = 0 \\ y \cos b - (x \sin l + z \cos l) \sin b = 0, \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

де перші 2 рівняння описують пряму, яка відповідає напрямку від центру планети до точки з координатами (l, b) , а третє описує фігуру поверхні планети. Шукається точка перетину.

Випадок еліпсоїда

У випадку еліпсоїда рішення виглядає так:

$$\begin{cases} x = r(b, l) \cos b \sin l \\ y = r(b, l) \sin b \\ z = r(b, l) \cos b \cos l \end{cases}, \quad (19)$$

де

$$r(b, l) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 b \sin^2 l}{A^2} + \frac{\sin^2 b}{B^2} + \frac{\cos^2 b \cos^2 l}{C^2}}}.$$

Етап В: $(x, y, z) \rightarrow (x_p, y_p)$

Перехід від Декартових координат,

пов'язаних з планетою,

до прямокутних координат на зображенні

Застосовується інверсне перетворення:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = MR_5^2 \cdot MT_2^2 \cdot MR_4^2 \cdot MT_1^2 \cdot MR_3^2 \cdot MR_2^2 \cdot MR_1^2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} . \quad (20)$$

Точка на площині проекції (x', y', z') , точка спостерігача $(0, 0, -D)$ і точка на зображенні $(x_p, y_p, 0)$ (в СК $(X'Y'Z')$) розташовані на одній прямій. Отже, повинен виконуватися такий вираз:

$$\frac{x_p}{x'} = \frac{y_p}{y'} = \frac{-D}{z' - D} .$$

$$\text{Отже, } x_p = x' D / (D - z'), \quad y_p = y' D / (D - z'). \quad (21)$$

Матриці трансформацій

$$MR_5^2 = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad MT_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MR_4^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \rho & -\sin \rho & 0 \\ 0 & \sin \rho & \cos \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad MT_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MR_3^2 = \begin{bmatrix} \cos(P_0 - \psi) & -\sin(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ \sin(P_0 - \psi) & \cos(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$MR_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b_0 & -\sin b_0 & 0 \\ 0 & \sin b_0 & \cos b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad MR_1^2 = \begin{bmatrix} \cos l_0 & 0 & -\sin l_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin l_0 & 0 & \cos l_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Вивести формули перетворення координат для сферичної планети.
2. Використовуючи роботу [1] , вивчити алгоритм обчислення фотометричні кутів:
“5 Transformation $(x, y, z) \rightarrow (\alpha, i, \varepsilon)$ ”.

Джерела

1. **E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, V.V. Korokhin, and O.S. Shalygina.** Formulas of the Perspective Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape:
<http://www.astron.kharkov.ua/dslpp/cartography/cartography.pdf>
2. **E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, and V.V. Korokhin.** Formulas of the Perspective Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape:
<http://www.astron.kharkov.ua/dslpp/cartography/>
3. **E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, and V.V. Korokhin.** Formulas of the Perspective Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape. // Lunar and Planet. Sci. 34-rd. Abstract #1946. 2003. LPI. Houston:
<http://www.lpi.usra.edu/meetings/lpsc2003/pdf/1946.pdf>

Ура! Це все!