Курс «Космическая картография»

Лекция 04

Перспективная проекция для случая планеты произвольной формы

ver. 2013.10.01

Корохин Виктор Валентинович

v.v.korokhin@gmail.com

Institute of Astronomy,
Kharkiv V.N. Karazin National University, Ukraine

2013.10.01, Харьков

План лекции

1. Постановка задачи
2. Основные системы координат
3. Параметры, задающие проекцию
4. Переход от прямоугольных координат на плоскости перспективной проекции (на изображении) к планетографическим координатам
5. Переход от планетографических координат к прямоугольным координатам на плоскости перспективной проекции (на изображении)

Постановка задачи

Фигуры различных тел Солнечной Системы

Косм. тело	Полярное сжатие	Экв. радиус, км	Перепад высот, км	Перепад высот, в $R_{экв}$
Солнце	$9 \cdot 10^{-6}$	$6.9551 \cdot 10^{5}$		
Луна	0.00125	1738.1	до 20	0.0115
Земля	0.0033528	6378,1	19.842	0.0031
Марс	0.00589	3396.2	до 35-37	0.0106
Юпитер	0.06487	71492.0		
Сатурн	0.09796	60268.0		
Астероиды и кометы				

Фигуры многих космических тел далеки от сферы, и на многих из них сложный рельеф (перепады высот)

E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, V.V. Korokhin, and O.S. Shalygina.
Formulas of the Perspective Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape

Формулы опубликованы в работах [1, 2, 3]

Алгоритмы реализованы в рамках программной системы xIRIS (БПК – Библиотека Планетной Картографии)

Описание фигуры планеты

1. Самый общий вид

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

2. Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1, \qquad (2)$$

где A, B, C – полуоси эллипса.

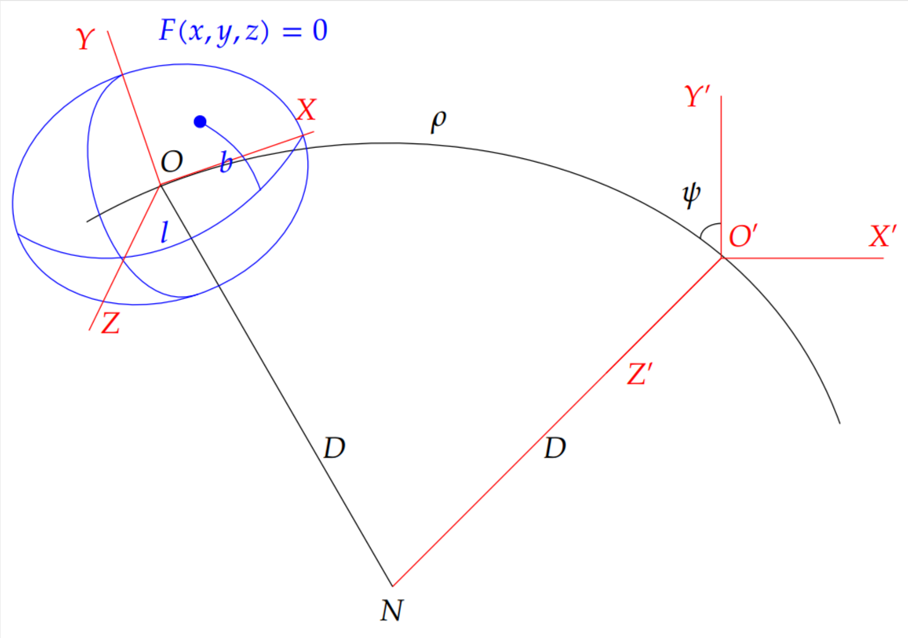
3. Сфера

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (3)$$

4. Сфера с картой локальных высот $h(x, y, z)$ (откл. от сферы)

$$x^2 + y^2 + z^2 = (R + h(x, y, z))^2. \qquad (4)$$

Основные системы координат

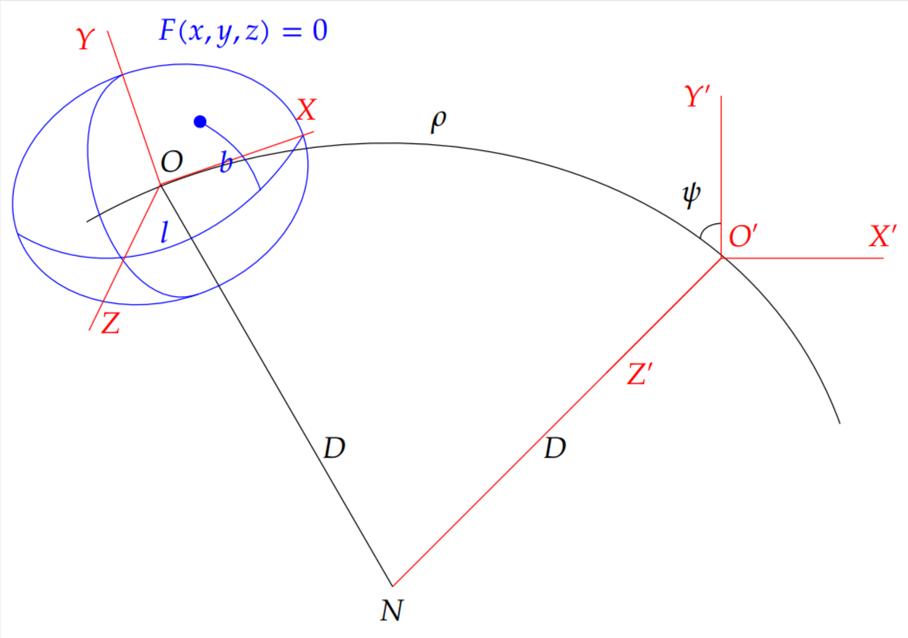


(x_P , y_P) – гоординаты точки на плоскости изображении.

(*XYZ*) – система координат СК с началом координат (НК) в центре планеты ***0***. Ось ***Y*** направлена на сев. полюс. Ось ***Z*** направлена на точку с нулевыми планетоцентрич. коодинатами $l = b = 0$.

(*X'Y'Z'*) – СК с НК в точке пересечения линии визирования и плоскости проекции ***0'***. Оси ***X'*** и ***Y'*** совпадают с осями X_P и Y_P на плоскости изображении. Ось ***Z'*** направлена на наблюдателя ***N*** (точку проекции). ***X'0'Z'*** – это плоскость проекции (ПП). Координаты наблюдателя в этой СК $x' = y' = 0$, $z' = D$.

Параметры, задающие проекцию



D – расстояние от наблюдателя до центра планеты и от наблюдателя до ПП.

ρ – угол отклонения линии визирования от направления на центр планеты (для КА – это отклонение от надира).

ψ – азимут этого отклонения. Отсчитывается в плоскости изображения от позитивного направления оси ***Y′*** против час. стрелки. Для поперечной (экваториальной, англ. Vertical) проекции $\rho = \psi = 0$.

b_0, l_0 – планетографические координаты поднаблюдательной точки.

Во всех СК координаты отсчитываются в одинаковых единицах (например, км).

Переход от прямоугольных координат на плоскости перспективной проекции (на изображении) к планетографическим координатам

$$(x_p, y_p) \rightarrow (l, b)$$

Этап А: $(x_p, y_p) \to (x, y, z)$
Переход от прямоугольных координат на изображении к Декартовым координатам, связанным с планетой

Уравнение линии визирования в системе (XYZ):

$$\frac{x - x_N}{x_A - x_N} = \frac{y - y_N}{y_A - y_N} = \frac{z - z_N}{z_A - z_N}, \qquad (5)$$

где $(x_N,\ y_N,\ z_N)$ – координаты наблюдателя, $(x_A,\ y_A,\ z_A)$ – координаты точки на плоскости проекции, соотв. $(x_p,\ y_p)$.

Координаты наблюдателя:

$$\begin{cases} x_N = D \cdot \sin l_0 \cos b_0 \\ y_N = D \cdot \sin b_0 \\ z_N = D \cdot \cos l_0 \cos b_0 \end{cases}, \qquad (6)$$

где l_0, b_0 – планетоцентрические координаты наблюдателя.

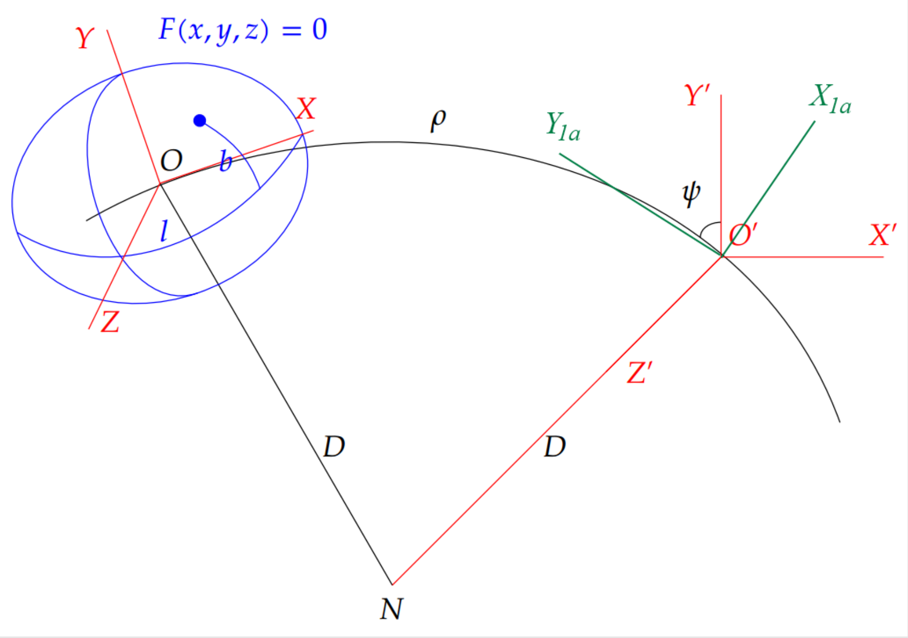
1. Переход в систему координат (x_1, y_1, z_1) с началом в центре планеты

Производится в 4 приема:

(a) поворот → (b) сдвиг → (c) поворот → (d) сдвиг.

(1a) Поворот на угол ψ вокруг оси Z', чтобы поместить центр планеты в плоскость $Y_{1a}O'Z_{1a}$

$$\begin{bmatrix} x_{1a} \\ y_{1a} \\ z_{1a} \\ 1 \end{bmatrix} = MR_1^1 \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \qquad MR_1^1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

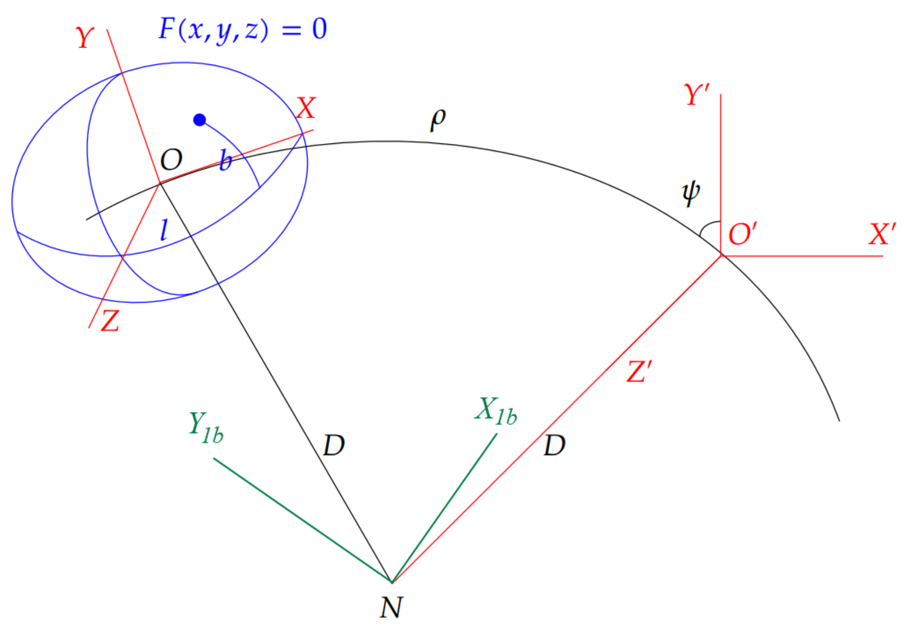


Запись в обычной форме:

$$\begin{cases} x_{1a} = x' \cdot \cos\psi + y' \cdot \sin\psi \\ y_{1a} = -x' \cdot \sin\psi + y' \cdot \cos\psi \\ z_{1a} = z' \end{cases}$$

(1b) Сдвиг начала координат в точку наблюдателя N

$$\begin{bmatrix} x_{1b} \\ y_{1b} \\ z_{1b} \\ 1 \end{bmatrix} = MT_1^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{1a} \\ y_{1a} \\ z_{1a} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad MT_1^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

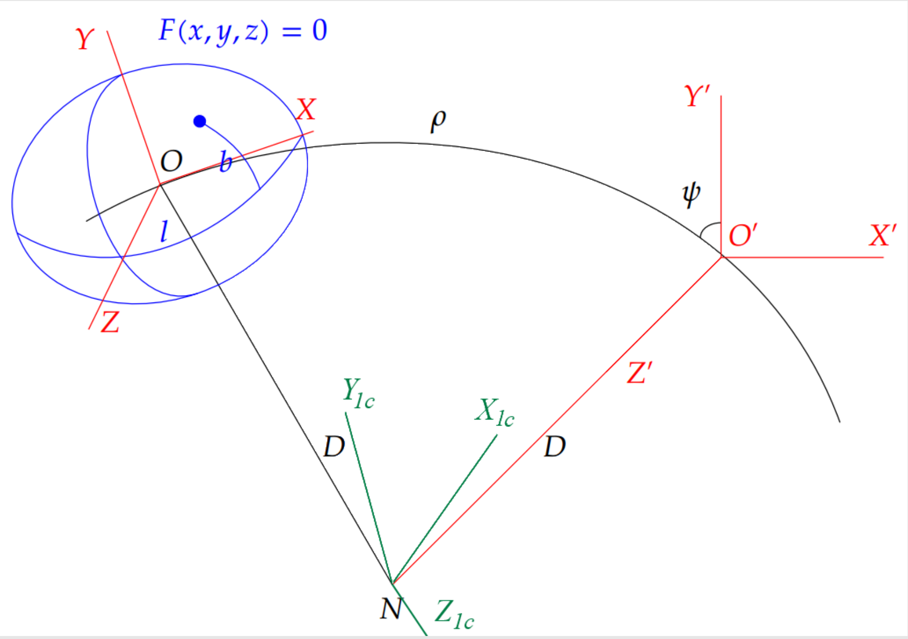


Запись в обычной форме:

$$\begin{cases} x_{1b} = x_{1a} \\ y_{1b} = y_{1a} \\ z_{1b} = z_{1a} - D \end{cases}$$

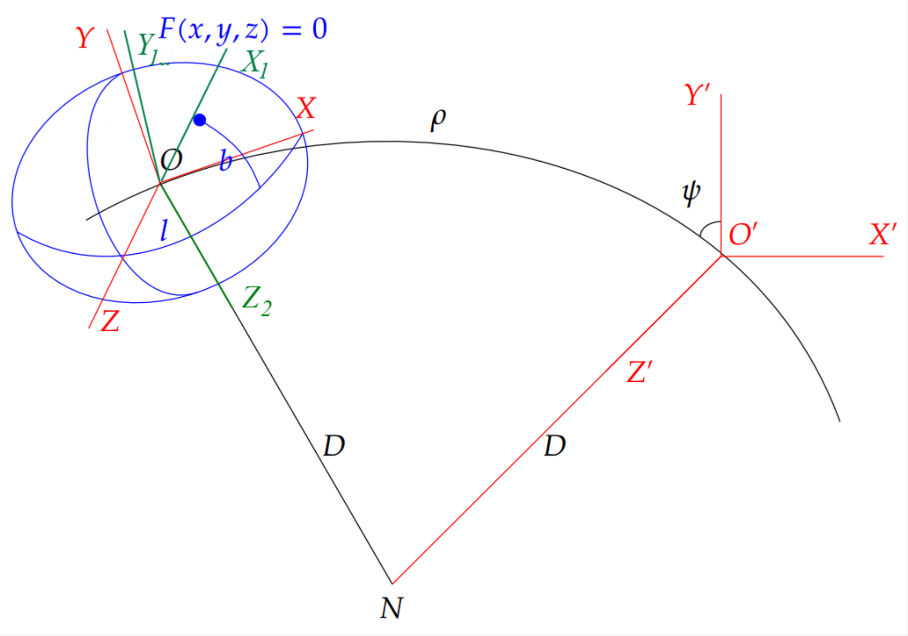
(1c) Поворот на угол ρ вокруг оси X_{1b}, чтобы поместить центр планеты на ось Z_{1c}

$$\begin{bmatrix} x_{1c} \\ y_{1c} \\ z_{1c} \\ 1 \end{bmatrix} = MR_2^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{1в} \\ y_{1в} \\ z_{1в} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad MR_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\rho & \sin\rho & 0 \\ 0 & -\sin\rho & \cos\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$



(1d) Сдвиг начала координат в центр планеты

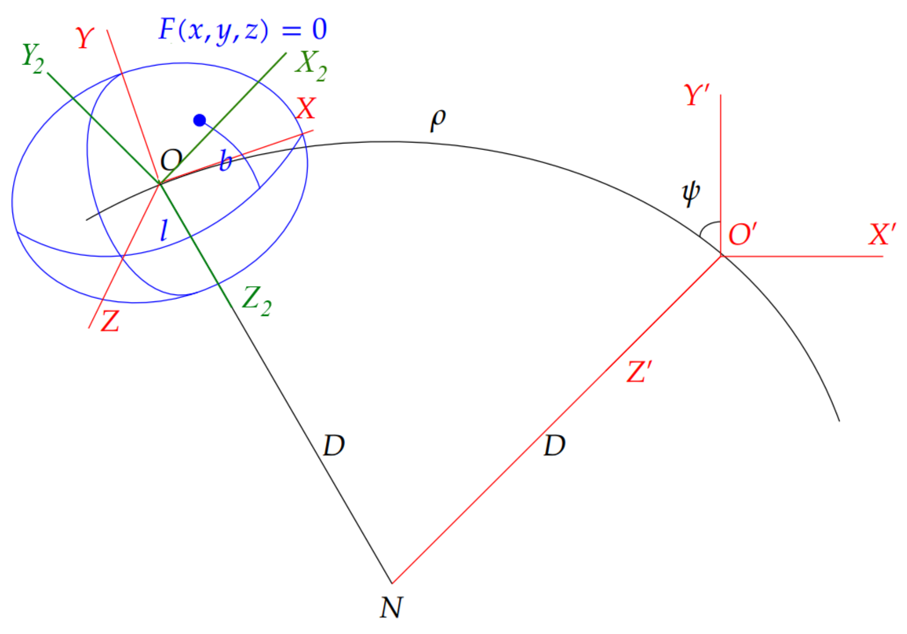
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = MT_2^1 \cdot \begin{bmatrix} x_{1c} \\ y_{1c} \\ z_{1c} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad MT_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$



2. Поворот на угол вокруг оси Z_1, чтобы поместить центральный меридиан планеты вдоль ось Y_2

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = MR_3^1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad MR_3^1 = \begin{bmatrix} \cos(P_0 - \psi) & \sin(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ -\sin(P_0 - \psi) & \cos(P_0 - \psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

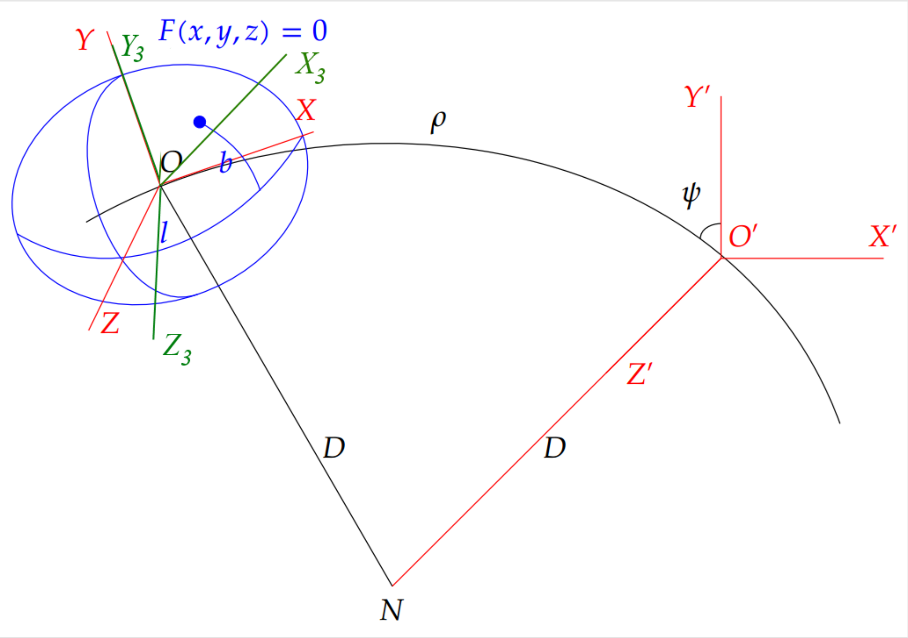
где $\boldsymbol{P_0}$ – позиционный угол проекции полярной оси планеты на изображении, отсчитываемый от направления «север вверху» против часовой стрелки.



$\boldsymbol{(P_0 - \psi)}$ – позиционный угол, отсчитываемый от направления от центра планеты к центру косой перспективной проекции.

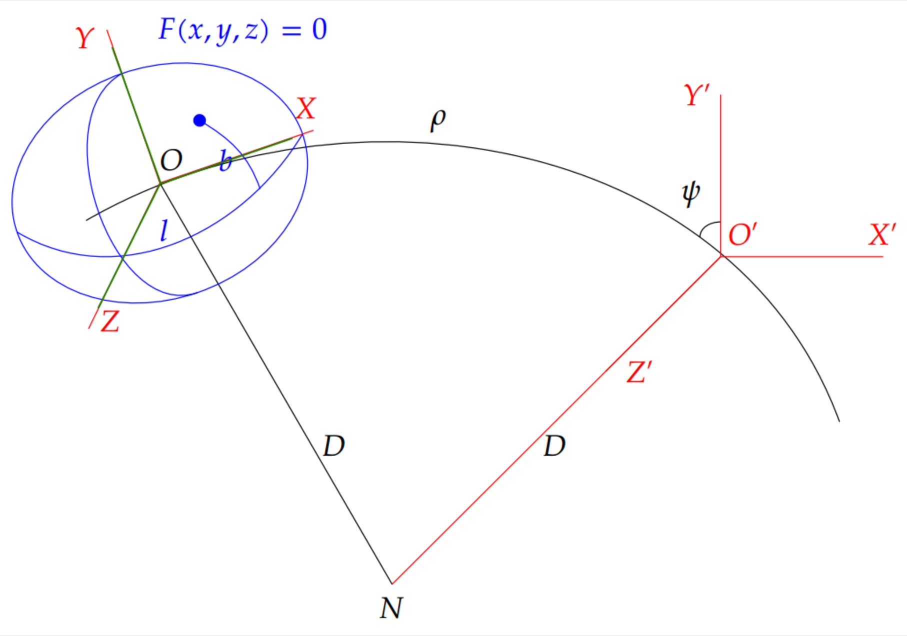
3. Поворот на угол b_0 вокруг оси X_2 (лежащей в плоскости экватора планеты) с тем, чтобы ось Y_3 оказалось направленной на северный полюс планеты:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} = MR_4^1 \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad MR_4^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos b_0 & \sin b_0 & 0 \\ 0 & -\sin b_0 & \cos b_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12)$$



4. Поворот на угол l_0 вокруг оси Y_3, чтобы ось Z оказалось направленной на точку с нулевыми планетограф. координатами:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = MR_5^1 \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad MR_5^1 = \begin{bmatrix} \cos l_0 & 0 & \sin l_0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin l_0 & 0 & \cos l_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13)$$



Процедура $(x_p, y_p) \rightarrow (x, y, z)$ в матричной форме

В нашем случае $(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A)$.

$$\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ 1 \end{bmatrix} = MR_5^1 \cdot MR_4^1 \cdot MR_3^1 \cdot MT_2^1 \cdot MR_2^1 \cdot MT_1^1 \cdot MR_1^1 \cdot \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Для вычисления координат точки на поверхности планеты (x, y, z) необходимо решить систему (5) вместе с уравнением (1). Необходимо найти все решения – все точки пересечения прямой с поверхностью и выбрать точки, находящиеся на минимальном расстоянии:

$$d = (x_N - x)^2 + (y_N - y)^2 + (z_N - z)^2. \qquad (15)$$

Случай эллипсоида

В случае эллипсоида (уравнение (2)) задача сводится к решению квадратного уравнения:

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{c_2}\left(-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_2\left(a_2^2 + a_4^2 - 1\right)}\right) \\ y = A\left(a_1 z + a_2\right) \\ z = B\left(a_3 z + a_4\right) \end{cases}, \qquad (16)$$

где

$a_1 = (1/A)\cdot(x_A - x_N)/(z_A - z_N)$, $a_2 = x_N/A - a_1\cdot z_N$,

$a_3 = (1/B)\cdot(y_A - y_N)/(z_A - z_N)$, $a_2 = y_N/B - a_3\cdot z_N$,

$c_1 = a_1\, a_2 + a_3 a_4$, $c_2 = a_1^2 + a_3^2 + 1/C^2$.

Решение с меньшим d (15) соответствует ближней стороне планеты.

Этап B: $(x, y, z) \to (l, b)$
Переход от Декартовых координат, связанных с планетой, к планетографическим

По определению планетоцентрических координат (l, b):

$$\begin{cases} b = \arcsin\left(y/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\ l = \arctan\left(x/z\right) - \pi\,\mathrm{sign}\left(z\right)\left(1-\mathrm{sign}\left(z\right)\right)/2 \end{cases} \quad (17)$$

Благодаря применению функции sign() удается избежать неоднозначности функции arctan().

Переход от планетографических координат к прямоугольным координатам на плоскости перспективной проекции (на изображении)

$$(l, b) \rightarrow (x_p, y_p)$$

Этап А: (*l*, *b*) → (*x*, *y*, *z*)
Переход от планетографических координат к Декартовым, связанным с планетой

Координаты точки на поверхности планеты (x, y, z) находятся путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x\cos l - z\sin l = 0 \\ y\cos b - (x\sin l + z\cos l)\sin b = 0, \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \qquad (18)$$

где первые 2 уравнения описываю прямую, соотв. направлению от центра планеты к точке с координатами $(l,\ b)$, а третье описывает фигуру поверхности планеты. Ищется точка пересечения.

Случай эллипсоида

В случае эллипсоида решение выглядит так:

$$\begin{cases} x = r(b,l)\cos b \sin l \\ y = r(b,l)\sin b \\ z = r(b,l)\cos b \cos l \end{cases}, \qquad (19)$$

где

$$r(b,l) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 b \sin^2 l}{A^2} + \frac{\sin^2 b}{B^2} + \frac{\cos^2 b \cos^2 l}{C^2}}}.$$

Этап B: $(x, y, z) \rightarrow (x_p, y_p)$
Переход от Декартовых координат, связанных с планетой к прямоугольным координатам на изображении

Применяется инверсное преобразование:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = MR_5^2 \cdot MT_2^2 \cdot MR_4^2 \cdot MT_1^2 \cdot MR_3^2 \cdot MR_2^2 \cdot MR_1^2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad . \qquad (20)$$

Точка на плоскости проекции (x', y', z'), точка наблюдателя $(0, 0, -D)$ и точка на изображении $(x_p, y_p, 0)$ (в СК $(X'Y'Z')$) расположены на одной прямой. Следовательно, должно выполняться следующее выражение:

$$\frac{x_p}{x'} = \frac{y_p}{y'} = \frac{-D}{z' - D} \, .$$

Следовательно, $x_p = x' D/(D - z')$, $y_p = y' D/(D - z')$. (21)

Матрицы трансформаций

$$MR_5^2=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$MT_2^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & D\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$MR_4^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\rho & -\sin\rho & 0\\ 0 & \sin\rho & \cos\rho & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$MT_1^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -D\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$MR_3^2=\begin{bmatrix}\cos(P_0-\psi) & -\sin(P_0-\psi) & 0 & 0\\ \sin(P_0-\psi) & \cos(P_0-\psi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$MR_2^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos b_0 & -\sin b_0 & 0\\ 0 & \sin b_0 & \cos b_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$MR_1^2=\begin{bmatrix}\cos l_0 & 0 & -\sin l_0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin l_0 & 0 & \cos l_0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Задание для самостоятельной работы

1. Вывести формулы преобразования координат для сферической планеты.

2. Используя работу [1] , изучить алгоритм вычисления фотометрических углов (5 Transformation (x, y, z) → (α, i, ε)).

Список источников

1. **E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, V.V. Korokhin, and O.S. Shalygina.** Formulas of the Perspective Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape: http://www.astron.kharkov.ua/dslpp/cartography/carthography.pdf

2. **E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, and V.V. Korokhin.** Formulas of the Perspecitive Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape: http://www.astron.kharkov.ua/dslpp/cartography/

3. **E.V. Shalygin, Yu.I. Velikodsky, and V.V. Korokhin.** Formulas of the Perspecitive Cartographic Projection for Planets and Asteroids of Arbitrary Shape. // Lunar and Planet. Sci. 34-rd. Abstract #1946. 2003. LPI. Houston: http://www.lpi.usra.edu/meetings/lpsc2003/pdf/1946.pdf

Ура! Это всё!